

ESTUDIO DE EXTENSIONES DE COLOREO IMPAR EN GRAFOS PLANARES

Trabajo de Título para optar al título profesional de
Ingeniero Civil Matemático

Yazmín Victoria Barahona Díaz

Profesor Guía

Andrea Jiménez

Universidad de Valparaíso

Profesor Co-Guía

Henry Echeverría

Universidad de Valparaíso

Miembros de la comisión:

Andrea Jiménez

Daniel Quiroz

Henry Echeverría

Resumen

Este trabajo se enmarca en la teoría de grafos, específicamente en el estudio de variantes del coloreo impar en grafos planares. Motivado por aplicaciones en asignación de frecuencias y por recientes desarrollos teóricos, se analizan dos extensiones del coloreo impar: la coloración impar casi fuerte, introducida en esta investigación, y la coloración 2-impar, propuesta previamente en la literatura. Ambas nociones imponen restricciones de paridad en las ocurrencias de colores dentro del vecindario de cada vértice.

El objetivo principal es estudiar el comportamiento de los números cromáticos asociados a estas coloraciones en distintas subclases de grafos planares. En primer lugar, se establecen cotas superiores ajustadas para árboles, grafos unicíclicos, ruedas y escaleras de Möbius, mostrando que estas estructuras permiten una caracterización precisa de los nuevos parámetros cromáticos. En particular, se evidencia que las coloraciones impar casi fuerte y 2-impar no son comparables en general, aunque coinciden en ciertas clases específicas.

El foco central del trabajo se sitúa en los grafos outerplanares maximales. Se demuestra que, en esta clase, los números cromáticos impar casi fuerte y 2-impar coinciden, y que ambos están acotados superiormente por 6. La demostración utiliza una construcción recursiva de estos grafos junto con técnicas de permutación de colores y el análisis de testigos, que permiten extender coloraciones manteniendo las propiedades de paridad requeridas. Además, para la subclase de grafos outerplanares maximales sin "triángulos internos", se prueba que la cota se reduce a 5 y que esta es óptima.

Finalmente, se exploran clases más amplias de grafos planares, incluyendo grafos outerplanares no maximales y triangulaciones tipo stack (3-árboles planares). En estos casos, se obtienen nuevas cotas superiores, destacando que 7 colores son suficientes para grafos outerplanares generales y que 10 colores bastan para la coloración 2-impar en triangulaciones stack. En conjunto, el trabajo aporta nuevas definiciones, cotas mejoradas y herramientas metodológicas que contribuyen al entendimiento de las coloraciones impares en grafos planares y abren nuevas líneas de investigación en el área.

Esta página ha sido dejada en blanco intencionalmente.

Agradecimientos

Al completar este trabajo, es momento de mirar hacia atrás y reconocer a todas las personas que hicieron posible este camino. Este trabajo de título no es solo el resultado de horas de estudio y trabajo individual, sino el fruto de un esfuerzo colectivo, de conversaciones, de apoyo incondicional, pero principalmente de personas que creyeron en mi incluso cuando yo dudaba.

En primer lugar quiero agradecer a mi familia, por siempre comprender los momentos de ausencia debido a los estudios, por darme ánimos cuando el final del camino se veía improbable y por celebrar conmigo cada avance y triunfo, por pequeño que fuera. A mi abuela Margarita por siempre tener un momento para escucharme, por entregarme su cariño y apoyo durante este largo camino, por entender los cambios de humor precedentes del cansancio y las largas horas de estudio. A mi hermana Dahian por nunca dejarme sola, darme ánimos cuando pensaba que todo estaba saliendo mal y hacerme comprender que todas las etapas son necesarias para un mejor final. A Santiago por estar en los buenos y malos momentos, por dejarme descargar cada pena y enojo sin nunca recriminar nada y motivarme a seguir avanzando. Gracias a cada uno de los miembros de mi familia por ser el pilar que necesitaba para superar este camino.

Quiero expresar mi profundo agradecimiento a mi profesora guía, Andrea Jiménez, quien con paciencia infinitas me guió por todos estos años de estudio, particularmente por el camino de esta investigación. Gracias por cada reunión en las que compartimos nuestras ideas, por su capacidad de ver claridad en el medio del caos de demostraciones que no tenían fin, pero principalmente por confiar en que podía llegar hasta aquí. Su pasión por las matemáticas y su enorme generosidad al compartir sus conocimientos han sido fundamentales desde el comienzo de mi formación.

A Henry Echeverría, por su disposición constante a discutir ideas, revisar demostraciones y redacciones cuando era necesario, tus observaciones precisas me ayudaron a pulir argumentos y a ver conexiones que por mi cuenta no habría descubierto.

A Daniel Quiroz, por introducirme en el fascinante mundo de la teoría de grafos, por resolver cada una de mis dudas cuando fue el momento de hacerlas y ahora que nos encontramos en el final por aceptar ser parte de la comisión evaluadora y el tiempo dedicado a revisar este trabajo.

A mis amigas de la universidad, quienes convirtieron estos años universitarios en una experiencia inolvidable. Por las sesiones de estudios compartidas, por las conversaciones necesarias, por estar ahí tanto en los momentos de celebración como en aquellos de frustraciones y por trascender esta amistad desde el aula a la vida.

Agradecer al Instituto de ingeniería matemática, por proporcionar los recursos necesarios para mi formación académica. A mis profesores, quienes a lo largo de estos años me entregaron herramientas fundamentales para enfrentar desafíos como este.

Agradecer a los proyectos Núcleo Milenio sodas NCN2024_103 Y Fondecyt Regular 1220071 por el apoyo a esta investigación.

Finalmente agradecer a cada persona, que de una manera u otra, contribuyó a este proceso. Este trabajo es el resultado de muchas mentes y corazones. Gracias por guiar mi trabajo hasta aquí.

Esta página ha sido dejada en blanco intencionalmente.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Definiciones básicas	10
1.2. Origen del concepto de coloración impar	12
1.3. Extensiones de coloreo impar	16
1.4. Resultados de este trabajo de título	18
2. Estudio en subclases clásicas de grafos planares	20
2.1. Impar fuerte y 2-impar no son comparables en general	20
2.2. Resultados en subclases de grafos planares	21
3. Coloraciones en grafos outerplanares maximales	28
3.1. Propiedades de grafos outerplanares maximales	29
3.1.1. Igualdad de números cromáticos impar casi fuerte y 2-impar.	29
3.2. Construcción recursiva de los grafos outerplanares maximales.	30
3.3. Estudio en grafos outerplanares maximales	31
3.4. Estudio en grafos outerplanares maximales sin triángulos interiores	39
3.4.1. Ejemplo cota justa	43
4. Exploración en grafos outerplanares y 3-árboles planares	45
4.1. Exploración en grafos outerplanares	45
4.2. Exploración en triangulaciones stacks	47
4.2.1. Construcción del grafo	47
4.2.2. Evidencia de que 10 colores son suficientes	48

Capítulo 1

Introducción

La teoría de grafos constituye una de las ramas más dinámicas de las matemáticas discretas, con un creciente impacto en áreas aplicadas como informática, biología, economía e ingeniería. Entre los problemas clásicos de esta disciplina, los relacionados con coloraciones han sido objeto de estudio por más de un siglo, motivados tanto por su relevancia teórica como por aplicaciones prácticas, por ejemplo la asignación de frecuencias en redes inalámbricas y la optimización de recursos en sistemas distribuidos.

Dentro de este ámbito, la coloración ha ocupado un rol central, en particular el célebre *Teorema de los cuatro colores*, que asegura que todo grafo que puede ser dibujado en el plano sin cruce de aristas, el cual se define como grafo planar puede colorearse con a lo más cuatro colores. A partir de esta noción se han propuesto variantes y generalizaciones que buscan capturar condiciones adicionales en los vecindarios de los vértices, con el fin de modelar de manera más precisa diversos fenómenos.

Las coloraciones impares encuentran su origen en problemas aplicados de asignación de frecuencias a antenas celulares, donde es necesario garantizar ciertas propiedades de unicidad o paridad en las frecuencias asignadas a estaciones vecinas. En particular, la coloración propia sin conflicto, propuesta por Fabrici et al. [1], requiere que cada vértice no aislado tenga al menos un color que aparezca exactamente una vez en su vecindario. La coloración impar relaja esta condición al permitir ocurrencias impares en lugar de exigir ocurrencia única, manteniendo propiedades útiles para aplicaciones pero facilitando su tratamiento teórico. Esta relajación no es artificial: mientras que la coloración propia sin conflicto está conjeturada para requerir a lo más 6 colores en grafos planares, la coloración impar podría requerir menos, y de hecho, Petruševski y Škrekovski [2] conjeturaron que todo grafo planar tiene número cromático impar a lo más 5.

Posteriormente, Kwon y Park [3] ampliaron esta idea mediante la definición de **coloración impar fuerte**, en la que todos los colores del vecindario deben aparecer una cantidad impar de veces. Estas variantes han abierto nuevas líneas de investigación, planteando problemas combinatorios desafiantes y conjeturas de gran interés, especialmente en el caso de grafos planares.

A pesar de los avances recientes, persisten importantes preguntas abiertas que motivan la presente investigación. La mejor cota superior conocida hasta 2023 para el número cromático impar en grafos planares es 8, demostrada por Petr y Portier [4]. Para la coloración impar fuerte, la situación es aún más incierta: se conoce una cota superior de 388 para grafos planares, establecida por Caro et al. [5], y de 8 para grafos outerplanares, demostrada por Goetze et al. [6].

El presente trabajo surge precisamente de la búsqueda por cerrar estas brechas y comprender mejor la estructura cromática de los grafos planares. Para ello, se centra en el estudio de dos nuevas extensiones: la **coloración impar casi fuerte** y la **coloración 2-impar**. La coloración impar casi fuerte, propuesta en esta investigación por Barahona, Echeverría y Jiménez, permite que un vértice de grado impar tenga vecindario monocromático, o bien que existan al menos dos colores con ocurrencia impar en su vecindario.

Esta definición se posiciona jerárquicamente entre la coloración impar y la coloración impar fuerte, proporcionando mayor flexibilidad en la búsqueda de coloraciones válidas mientras mantiene restricciones significativas. Por otro lado, la coloración 2-impar, introducida previamente por Dai, Ouyang y Pirot [7], exige que cada vértice v vea $\min\{d(v), 2\}$ colores con ocurrencia impar.

La estrategia metodológica empleada combina técnicas clásicas de teoría de grafos con enfoques constructivos específicos para las coloraciones estudiadas. Se comienza estableciendo cotas justas para los números cromáticos de interés en clases básicas de grafos planares: árboles, uniciclos, ruedas y escaleras de Möbius. Estos resultados, presentados en el Capítulo 2, no solo proporcionan una caracterización completa de estas estructuras fundamentales, sino que también permiten desarrollar intuición sobre el comportamiento de las coloraciones y las técnicas necesarias para abordar clases más complejas. Por ejemplo, se demuestra que para árboles, la coloración impar casi fuerte requiere a lo más 3 colores mientras que la coloración 2-impar requiere a lo más 4, exhibiendo ya una separación entre ambos conceptos.

Con estas herramientas en mano, la investigación avanza hacia clases más generales de grafos planares. El foco principal se coloca en los grafos outerplanares, una subclase natural de grafos planares donde todos los vértices pertenecen a la cara exterior. Para la coloración impar fuerte, Goetze et al. [6] establecieron recientemente una cota superior de 8 colores en grafos outerplanares, mejorando resultados anteriores.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de grafos outerplanares maximales, aquellos grafos outerplanares en los que todas las caras interiores están trianguladas. El primer resultado fundamental, demostrado en la Sección 3.1.1, establece que en la clase de grafos outerplanares maximales, los números cromáticos impar casi fuerte y 2-impar coinciden, es decir, dada la estructura de los grafos, la coloración impar casi fuerte es también una coloración 2-impar, la igualdad también se tiene al revés. Esta igualdad, que se deriva de la estructura particular de estos grafos donde el vecindario de cada vértice forma un camino, simplifica significativamente el análisis posterior y permite concentrar esfuerzos en una única coloración.

Aprovechando esta igualdad y la construcción recursiva de los grafos outerplanares maximales mediante tres operaciones básicas, la Sección 3.3 desarrolla una demostración inductiva detallada de que las coloraciones coinciden y además están acotadas por 6, para todo grafo outerplanar maximal. La demostración se desarrolla con la técnica de permutación de colores: cuando se aplica la operación de unión de dos grafos outerplanares maximales más pequeños, es posible que los colores del borde resultante no permitan extender la coloración al agregar nuevos vértices. Sin embargo, mediante permutaciones cuidadosas de colores en uno de los subgrafos, siempre es posible obtener una configuración de borde que sí admite extensión, y crucialmente, esta permutación preserva las propiedades de la coloración en el resto del grafo.

El análisis se profundiza en la Sección 3.4, donde se estudia la subclase de grafos outerplanares maximales sin "triángulos interiores", que se han llamado en este trabajo caracoles y cadenas según su patrón de construcción. Para esta familia más restringida, se demuestra que la cota desciende a 5 y que esta cota es justa, es decir, existen grafos en esta clase que requieren exactamente 5 colores. La demostración procede identificando un conjunto finito de configuraciones de borde posibles y mostrando que, al aplicar las operaciones de construcción recursiva, estas configuraciones se transforman cíclicamente entre sí, permitiendo siempre extender la coloración con a lo más 5 colores.

Habiendo caracterizado completamente el caso de grafos outerplanares maximales, el Capítulo 4 explora extensiones en dos direcciones. Primero, en la Sección 4.1, se aborda la clase completa de grafos outerplanares, que incluye grafos que no son maximales. Aquí se demuestra que la coloración impar casi fuerte requiere de a lo más 7 colores, al igual que la coloración 2-impar, para todo grafo outerplanar (aunque las coloraciones no coincidan entre ellas), reduciendo la cota conocida de 8 para estas coloraciones particulares. La demostración adapta las técnicas desarrolladas para grafos outerplanares maximales, con la complicación adicional de que ahora el vecindario de un vértice no necesariamente

forma un camino. Sin embargo, la degenerancia 2 de los grafos outerplanares garantiza la existencia de un vértice de grado a lo más 2, permitiendo un argumento inductivo efectivo.

La segunda dirección de exploración, presentada en la Sección 4.2, considera una clase más amplia de grafos planares: las triangulaciones stack o 3-árboles planares. Estos grafos se construyen recursivamente comenzando con un triángulo y agregando vértices de manera iterativa en las caras interiores, conectándolos a los tres vértices del contorno de la cara. A diferencia de los grafos outerplanares maximales, estas estructuras pueden tener caras interiores anidadas a cualquier profundidad, aumentando significativamente su complejidad. Para esta clase, se verifica que una cota de 10 colores es suficiente para la coloración 2-impar.

Los métodos desarrollados a lo largo de este trabajo, particularmente la técnica de permutación de colores y el análisis sistemático de testigos (colores que aparecen una cantidad impar de veces en el vecindario de cada vértice), representan contribuciones metodológicas que pueden ser de utilidad para el estudio de otras variantes de coloración y otras clases de grafos. La noción de testigo, formalizada en el Capítulo 3, permite rastrear de manera precisa cómo las propiedades de las coloraciones se preservan o modifican al aplicar operaciones de construcción recursiva, y el análisis de las configuraciones posibles de testigos en los bordes de subgrafos proporciona un marco sistemático para demostrar resultados de extensibilidad.

En suma, esta investigación se enmarca en la línea de extender y profundizar los resultados existentes en teoría de coloraciones de grafos, con énfasis en la caracterización de nuevas propiedades cromáticas en grafos planares. Al introducir y estudiar las coloraciones impar casi fuerte y 2-impar, establecer cotas ajustadas en diversas clases de grafos, y desarrollar nuevas técnicas de demostración, este trabajo contribuye al desarrollo teórico de la disciplina, abriendo caminos para investigaciones futuras.

1.1. Definiciones básicas

En el contexto del coloreo de grafos planares, se definen a continuación los conceptos básicos que permiten tener la comprensión adecuada de todo el trabajo en estudio.

Grafo Se define el *grafo* G , como el par ordenado $G = (V, E)$, donde V es un conjunto finito llamado conjunto de *vértices* y E es un subconjunto de $\{\{u, v\} : u, v \in V\}$ llamado conjunto de *aristas*. En caso que $\{u, v\} \in E$, se dice que los vértices u, v están *unidos por una arista*, o bien, que u, v son *adyacentes*. A la vez, se dice que la arista $\{u, v\}$ *incide* en u y en v . Se denota la cantidad de vértices por $|V(G)|$ y la cantidad de aristas por $|E(G)|$.

Para las siguientes definiciones se considera un grafo $G = (V, E)$. Ver Figura 1.1 para una ilustración de cada concepto.

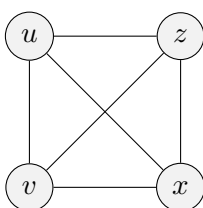


Figura 1.1: En este ejemplo se tiene un grafo con 4 vértices u, v, x, z y 6 aristas, las cuales son representadas por las líneas que unen a los vértices.

Grado de un vértice El *grado de un vértice* $v \in V$, se denota por $d(v)$ y corresponde al número de aristas en E que *inciden* en v . En la figura 1.1 el grado de u es 3 y es denotado como $d(u) = 3$.

Vecino Un par de vértices $u, v \in V$ son llamados *vecinos* si son adyacentes. Por lo tanto se define como *vecindario* de v al conjunto de vértices que son adyacentes a v y es denotado por $N_G(v)$. Dada la figura 1.1 los vecinos de v , son u, x, z , por lo tanto el vecindario de v es $N_G(v) = \{u, x, z\}$.

Subgrafo Dado un grafo $G = (V, E)$, se dice que el grafo $H = (V', E')$ es un *subgrafo* de G si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$. En la Figura 1.2 se presenta el ejemplo:

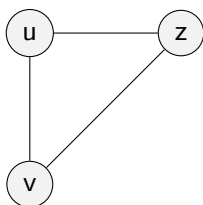
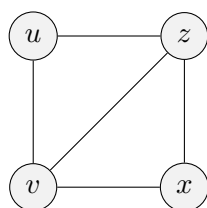


Figura 1.2: Acá se muestra un ejemplo de subgrafo del grafo presentado en la Figura 1.1

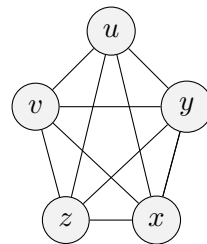
Camino y Ciclo Un *camino* es un grafo (V, E) en donde su conjunto de vértices corresponde a $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ (una secuencia de vértices) y las aristas son $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} : i \in \{1, \dots, k-1\}\}$. Luego, se define *ciclo* como un grafo que se obtiene a partir de un camino de al menos 3 vértices, añadiendo la arista $\{v_1, v_{i+1}\}$. A un ciclo también se le llama camino cerrado. Para la Figura 1.1 se puede encontrar un camino entre u y x siguiendo u, z, x .

Conexidad Se dice que el grafo $G = (V, E)$ es *conexo* si para todo par de vértices $u, v \in V$ existe un camino que une u con v , considerando en la Figura 1.1 que existe un camino entre todo par de vértices, Se tiene que el grafo es conexo.

Grafo Planar Un grafo se dice *planar* si existe una manera de dibujar el grafo en el plano sin cruces de aristas (ver Figura 1.3).



(a) Grafo planar



(b) Grafo no planar

Figura 1.3: Ejemplo de un grafo planar y un grafo no planar.

A lo largo de este trabajo, cada vez que se considere un grafo planar se toma a la vez un dibujo del mismo en el plano, y haciendo abuso de la notación $G = (V, E)$ tanto para el grafo como para su dibujo. Además se denomina $[k]$ al conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$

Caras En un grafo planar $G = (V, E)$, a cada una de las regiones del plano delimitadas por el dibujo del grafo se les llama *caras* de G . Existen dos tipos de caras:

- **Caras interiores:** corresponden a las regiones finitas. Utilizando la Figura 1.3 se observa que hay dos caras interiores. Una acotada por el triángulo formado por $\{u, v, z\}$ y la otra acotada por el triángulo $\{x, v, z\}$
- **Cara exterior:** corresponde a la región infinita. Para la Figura 1.3 todo lo que está fuera del cuadrado $\{u, v, x, z\}$ se denomina como cara exterior.

Contorno de una cara f Dado un grafo planar G y una cara f de G , el *contorno* de f es el subgrafo de G que intersecta la cara f . Para el ejemplo de la figura, el subgrafo presentado en la Figura 1.3, es precisamente el contorno de la cara f_1 del grafo presentado en la figura 1.3

Grafo outerplanar Un grafo G es *outerplanar* si es planar y además todos los vértices de G pertenecen al contorno de la *cara exterior* de G . El grafo de la Figura 1.3 además de ser planar, es outerplanar, dado que todos sus vértices están en el contorno de la cara exterior.

Por simplicidad, y haciendo abuso de la notación, se va a utilizar el nombre cara para el contorno.

Coloración Dado $k \in \mathbb{N}$ y G un grafo, una k -coloración de G es una función $c : V \rightarrow [k]$, esta coloración no pone ninguna restricción respecto a como se otorgan los colores a los vértices.

Coloración propia Dado $k \in \mathbb{N}$ y $G = (V, E)$ un grafo, una k -coloración *propia* de G , es una k -coloración $c : V \rightarrow [k]$ de G tal que $c(v) \neq c(w)$ cuando v y w son adyacentes, es decir, cuando $vw \in E$.

Número cromático El *número cromático de G* , denotado por $\chi(G)$, se define como el mínimo k , tal que G admite una k -coloración propia.

Para poder tener mejor conceptualización de lo que es una coloración propia de un grafo G se muestra la Figura 1.4:

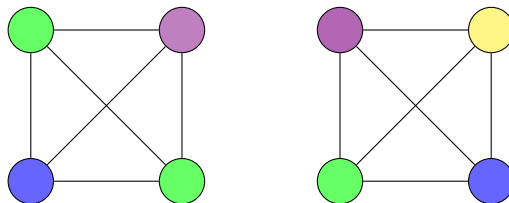


Figura 1.4: A la izquierda tenemos una 3-coloración no propia de K_4 , el grafo completo en 4 vértices y a la derecha una 4-coloración propia del mismo.

1.2. Origen del concepto de coloración impar

En 1852 Francis Guthrie postula que cualquier mapa, el cual puede ser visto como un grafo planar dada su estructura, puede ser propiamente coloreado con a lo más 4 colores, en donde dos áreas que compartan frontera, para este caso una arista, no pueden ser coloreados con el mismo color, es decir, dos caras adyacentes del plano no pueden ser coloreadas con el mismo color.

Este problema estuvo abierto por más de 100 años. Hasta que en 1976, Appel y Hacken [8] resolvieron este problema, hoy en día conocido como el Teorema de los 4 colores. Su demostración del teorema se realiza con ayuda de un amplio código computacional, el cual en 1996, es mejorado por Robertson, Sanders, Seymour y Thomas [9], al reducir la cantidad de configuraciones que se deben chequear utilizando asistencia computacional.

Desde el planteamiento del problema del coloreo de mapas, el estudio de la coloración en estructuras planares y, en general, de los problemas de coloración ha sido ampliamente desarrollado dentro de la teoría de grafos, constituyendo una de sus áreas clásicas. En este trabajo se aborda el estudio de coloraciones impares, una variante que introduce restricciones adicionales a la coloración propia adicional y que ha despertado interés en investigaciones recientes.

Para motivar el estudio de las coloraciones impares, primero se presenta el término de coloración propia sin conflicto (PCF), el cual es propuesto en 2023 por Fabrici, Lužar, Rindošová y Soták [1]. Este concepto se basa en el término de coloración sin conflictos, el cual se define sobre generalizaciones de grafos llamados hipergrafos [10]. Estas coloraciones son motivadas por problemas aplicados, como la asignación de frecuencias a antenas celulares, en aspectos de consumo de batería de redes de sensores, en protocolos RFID, entre otros [11].

La coloración propia sin conflictos se define de la siguiente manera:

Coloración propia sin conflicto Una k -coloración *propia sin conflicto* de un grafo G es una k -coloración propia de G que satisface que para cada vértice no aislado $v \in V(G)$ hay un color que ocurre exactamente una vez en el vecindario $N_G(v)$. Además, se define el número cromático propio sin conflicto de G , denotado por $\chi_{pcf}(G)$, como el mínimo k tal que G admite una k -coloración propia sin conflicto.

Dado que en este proyecto el interés está en los grafos planares, se presenta a continuación, la conjetura hecha por Fabrici et al. [1] para el número cromático propio sin conflicto en grafos planares.

Conjetura 1.1. Para todo grafo G planar se tiene que $\chi_{pcf}(G) \leq 6$.

De ser cierta la Conjetura 1.1, la cota es justa, dado que el siguiente grafo, requiere 6 colores para un coloramiento propio sin conflictos, esto se puede apreciar en el ejemplo de la Figura 1.5

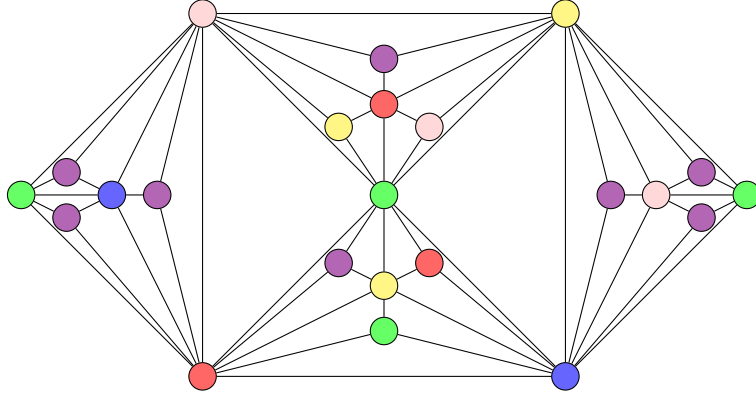


Figura 1.5: Ejemplo de Fabrice para cota justa de la Conjetura 1.1

Este trabajo se concentra en las coloraciones impares, las cuales surgen como una relajación de la definición de las coloraciones sin conflictos presentadas anteriormente, la noción de coloración impar es propuesta por Caro, Petruševsky y Škrekovski en 2022 [12].

Coloración impar Una k -coloración impar de un grafo G es una k -coloración propia de G que satisface que para cada vértice no aislado $v \in V(G)$ hay un color que ocurre una cantidad impar de veces en el vecindario $N_G(v)$. Además, se define el número cromático impar de G , denotado por $\chi_o(G)$, como el mínimo k tal que G admite una k -coloración impar.

En la siguiente proposición, se formaliza la relación jerárquica existente entre los número cromáticos recién definidos.

Proposición 1.1. Para todo grafo G se tiene que $\chi(G) \leq \chi_o(G) \leq \chi_{pcf}(G)$.

Nótese que si c es una coloración impar, esta cumple con ser una coloración propia por definición. Además, dependiendo del grafo, no toda coloración propia es impar, como muestra el ejemplo de la Figura 1.6. Por otro lado, si c es una coloración propia sin conflicto, esta por definición es también una coloración impar, dado que cumple que cada vértice ve al menos un color exactamente una vez. Al igual que en el caso anterior, dependiendo del grafo, una coloración impar no es siempre una coloración propia sin conflicto, porque puede ser que la ocurrencia impar del color en el vecindario sea distinta de 1.

A continuación se presenta un ejemplo en la Figura 1.6 para las desigualdades de la Proposición 1.1, donde además se puede apreciar que es posible que el número cromático impar coincida con el número cromático propio sin conflicto.



Figura 1.6: Se considera el grafo G correspondiente a un ciclo con 5 vértices. Se sabe que $\chi(G) = 3$. Por otro lado, dado que cada vértice del grafo es de grado 2, se tiene que $\chi_o(G) = \chi_{pcf}(G)$. Además, la coloración de la derecha exhibe una 5-coloración impar de G , y no es posible colorear imparmente con menos colores, lo cual muestra que $\chi_o(G) = \chi_{pcf}(G) = 5$

En 2022, Petruševsky y Škrekovski [2] plantean la siguiente conjetura para el número cromático impar en grafos planares.

Conjetura 1.2. Para todo G planar se tiene que $\chi_o(G) \leq 5$.

Dentro del artículo [2], los autores demuestran la cota del número cromático impar hasta 9. La cual en 2023 es mejorada hasta 8, por Petr y Portier [4]. Por otro lado, la cota de 5 de ser verdadera es justa, dado que para el ciclo de 5 vértices son necesarios 5 colores para que la coloración sea impar, además existe una familia infinita generada por estos ciclos, los cuales también requieren de 5 colores.

El trabajo realizado hasta la fecha en torno al número cromático impar es extenso. En lo siguiente se lista algunos de los resultados existentes que son pertinentes a lo referente a trabajar.

Para poder presentar el listado es necesario primero definir algunos términos:

Grafos 1-planar Se dice que G es *1-planar*, si para cada arista se permiten se cruce a lo más con una aristas en el dibujo representado en el plano.

Cintura La *cintura* de un grafo G , denotada como $g(G)$, se define como la longitud del ciclo más corto contenido en G .

Outerplanar maximal Sea G un grafo outerplanar, este es *maximal* si todas sus caras interiores están trianguladas. En particular, la cara exterior es un ciclo que contiene a todos los vértices del grafo.

- Para grafos planares G sin ciclos de tamaño 3 adyacentes, $\chi_o(G) \leq 7$ (Miao, Sun, Tu & Yu, 2024)[13].
- La conjetura 1.2 está probada para grafos planares sin ciclos de largo 3, 5 o 6. (Wang, Wang & Liu, 2025) [14].
- Para grafos planares con cintura al menos 5, $\chi_o(G) \leq 6$ (Cho, Choi, Kwon & Park, 2023)[15].
- Para grafos planares con cintura al menos 11, $\chi_o(G) \leq 4$ (Cho, Choi, Kwon & Park, 2023)[15].
- Para grafos outerplanares, $\chi_o(G) \leq 5$ (Caro, Petruševski & Škrekovski, 2022)[12].

- Para grafos outerplanares conexos con bloques que no son copias de C_5 , $\chi_o(G) \leq 4$ (Kashima & Zhu, 2024)[16].
- Todo grafo outerplanar maximal G , tiene número cromático $\chi_o(G) = 4$ (Kashima, Maezawa, Osako, Ozeki & Tshuchiya, 2025) [17].

Una observación muy interesante realizada por Kashima, Maezawa, Osako, Ozeki & Tshuchiya [17], es que la veracidad de la siguiente conjetura implica el Teorema de los 4 Colores. Para la cual es necesario recordar que la cintura de un grafo es la cantidad de vértices de un ciclo más corto.

Conjetura 1.3. Para G planar con cintura al menos 6, se tiene que $\chi_o(G) \leq 4$

Proposición 1.2. La veracidad de la Conjetura 1.3, implica que todo grafo planar G satisface $\chi(G) \leq 4$.

Demostración. Para mostrar que la Proposición 1.2 es cierta, se debe considerar un grafo G que sea planar, se sabe que la cintura de G es al menos 3, dado que es el ciclo más pequeño que se puede encontrar.

Se define *subdivir* como la acción de eliminar la arista xy , agregar un nuevo vértice w y luego agregar las aristas xw y la arista wy

Se obtiene G' de subdividir una vez cada arista de G , por lo tanto ahora se tiene que la cintura de G' es al menos 6, y se mantiene la propiedad de que G' es planar.

Por la Conjetura 1.3 se asume que existe una coloración impar $c : V(G') \rightarrow [4]$. Como cada vértice creado en la subdivisión tiene grado 2, sus vecinos tienen colores distintos por ser una coloración impar, lo que provoca que la coloración c sea propia en G con exactamente los mismos 4 colores en los vértices originales, lo cual demostraría el teorema de los 4 colores. $\square$

Motivado por el estudio de la coloración impar y la coloración de cuadrado de grafos planares se origina una coloración que se obtiene al realizar una generalización de la coloración impar. Así, se introduce el término de coloración impar fuerte, la cual fue propuesta por Kwon y Park en 2024 [3].

Coloración impar fuerte Una k -coloración impar fuerte de un grafo G es una k -coloración propia de G que satisface que para cada vértice no aislado $v \in V(G)$ cada color ocurre una cantidad impar en el vecindario $N_G(v)$. Además, se define el número cromático impar fuerte de G , denotado por $\chi_{so}(G)$, como el mínimo k tal que G admite una k -coloración impar fuerte.

En la siguiente Proposición 1.3 formalizamos la relación entre el número cromático impar y el número cromático impar fuerte.

Proposición 1.3. Para todo grafo G , se tiene que $\chi_o(G) \leq \chi_{so}(G)$

Notar que toda coloración impar fuerte es una coloración impar por definición, pero una coloración impar no siempre cumple con ser coloración impar fuerte (para un ejemplo ver Figura 1.7).

En la Figura 1.7, se presenta un ejemplo de la relación mencionada en la Proposición 1.3.



Figura 1.7: Se llamará G al grafo presentado en la figura. A la izquierda se tiene una 4-coloración impar de G , por otro lado a la derecha se puede ver una 5-coloración impar fuerte de G . Se puede apreciar que $\chi_o(G) = 4$ y $\chi_{so} = 5$.

Para la coloración impar fuerte está demostrado que la cota superior para su número cromático es de 388 en grafos planares, en 2025 por Caro, et al. [5], mientras que la mejor cota superior presentada hasta hoy en día para grafos outerplanares desciende a 8, la cual fue demostrada en 2025 por Goetze, et. al [6]. Con los estudios realizados hasta el momento no se sabe si estas cotas son justas, pero si se ha encontrado un grafo planar que requiere de al menos 20 colores, mientras que para outerplanar, se ha encontrado uno que necesita de 7 colores.

Un concepto que ha motivado la coloración impar fuerte es el de coloración propia de un cuadrado de un grafo, el cual es denotado por G^2 , este concepto está bien estudiado y en particular, para grafos planares existe una famosa conjetura acerca de su número cromático [18]. En este trabajo, el número cromático del cuadrado de un grafo, permite encontrar cotas para una de las coloraciones de interés.

Distancia Sea $G = (V, E)$ un grafo y sean $x, y \in V$ dos vértices. La *distancia* entre x e y , denotada como $d(x, y)$ se define como la longitud (número de aristas) de un camino más corto entre x e y si tal camino existe.

Cuadrado de G Sea G un grafo, es llamado *cuadrado de G* , el grafo que se obtiene con el mismo conjunto de vértices que G , uniendo todos los vértices que están a lo más 2 en G .

Así, se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.4. Para todo grafo G es cierto que: $\chi_{so}(G) \leq \chi(G^2)$

Es simple ver que el vecindario en el cuadrado de G es un grafo completo, es decir, todos los vecinos de un vértice v son adyacentes en G^2 . Por lo tanto como todos los vértices están coloreados de manera distinta, cada color aparece exactamente una vez, lo cual entrega una cantidad impar de ocurrencia para cada color.

1.3. Extensiones de coloreo impar

Una de las motivaciones fundamentales de este trabajo fue la de definir una nueva coloración que generalizara la coloración impar, pero que a la vez fuese una relajación de la coloración impar fuerte. De esta manera, uno de los objetivos del trabajo sería poder mejorar las cotas del número cromático de esta nueva coloración provenientes de las cotas conocidas para el número cromático impar fuerte, pero con mayor flexibilidad. Es así como de este proyecto, surge la definición de una nueva coloración, la cual es propuesta por Barahona, Echeverría & Jiménez, y se presenta a continuación.

Coloración impar casi fuerte Una k -coloración impar casi fuerte de un grafo G es una k -coloración propia de G que satisface una de las dos condiciones para cada vértice no aislado $v \in V(G)$

- 1 El vértice v tiene grado impar, y su vecindario es monocromático.
- 2 Existen al menos 2 colores i, j distintos, los cuales aparecen una cantidad impar de veces en $N_G(v)$.

Además, se define el número cromático impar casi fuerte de G , denotado por $\chi_{qso}(G)$, como el mínimo k tal que G admite una k -coloración impar casi fuerte.

Se tiene la siguiente proposición:

Proposición 1.5. *Para todo G es cierto que, $\chi_o(G) \leq \chi_{qso}(G) \leq \chi_{so}(G)$*

Por definición toda coloración impar fuerte es una coloración impar casi fuerte, dado que se tiene la opción de que el vecindario sea monocromático cuando el grado es impar, por lo cual el número de ocurrencias del color es impar, o bien de que aparezcan dos colores una cantidad impar de veces, por otro lado, una coloración impar casi fuerte, es siempre una coloración impar, las desigualdades inversas no siempre son ciertas.

Un ejemplo de esto se ve en la Figura 1.8:

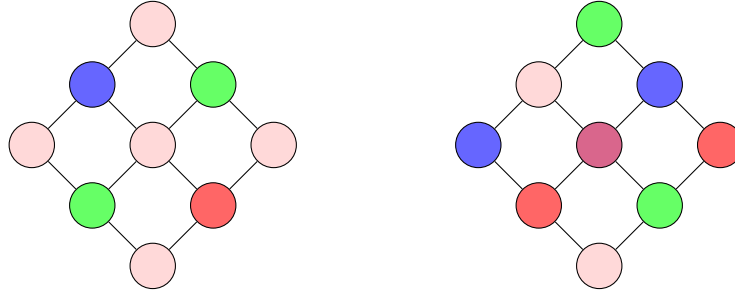


Figura 1.8: Se llama G al grafo presentado en el ejemplo. La coloración de la izquierda, se tiene una coloración impar, con $\chi_o(G) = \chi_{qso}(G) = 4$ a la derecha se presenta una coloración impar fuerte para el mismo grafo, donde $\chi_{so}(G) = 5$.

En el transcurso de esta investigación se descubrió en la literatura el concepto de k -coloración h -impar, el cual fue propuesto por Dai, Ouyang, Pirost en 2023 [7]. Esta, es una coloración que generaliza la coloración impar casi fuerte, incluso en el caso $h = 2$, pero no es comparable a la coloración impar fuerte. Se presenta la definición de k -coloración 2-impar a continuación.

Coloración 2-impar Una k -coloración 2-impar de un grafo G es una k -coloración propia de G que satisface que para cada vértice no aislado $v \in V(G)$ hay $\min\{d(v), 2\}$ colores que ocurren una cantidad impar de veces en el vecindario $N_G(v)$.

Además, se define el número cromático 2-impar de G , denotado por $\chi_o^2(G)$, como el mínimo k tal que G admite una k -coloración 2-impar.

Como es mencionado anteriormente, la coloración 2-impar es una generalización de la coloración impar casi fuerte, y así se tiene la siguiente proposición.

Proposición 1.6. *Para todo grafo G se cumple que : $\chi_{qso}(G) \leq \chi_o^2(G)$.*

Por definición de coloración 2-impar, en el vecindario de cada vértice hay al menos 2 colores que ocurren una cantidad impar de veces, salvo que el grado del vértice en cuestión sea 1, que es un número impar, por lo cual la coloración es también una coloración impar casi fuerte.

La coloración 2-impar no es comparable a la coloración impar fuerte, esto queda demostrado en el Capítulo 2, en la Proposición 2.1, y hasta donde se ha investigado en este trabajo de título, se desconoce

si el número cromático 2-impar está acotado por una constante en la clase de grafos planares. Sin embargo, la relación jerárquica si se cumple con el cuadrado del grafo G .

Proposición 1.7. *Para todo grafo G se cumple que $\chi_o^2(G) \leq \chi(G^2)$.*

Notar que en el cuadrado de un grafo G , el vecindario es un grafo completo. Sea c una colación propia de G^2 . Como el vecindario de un vértice completo, entonces todos los colores son diferentes y ocurren exactamente una vez. Entonces en vértices de grado al menos dos se cumple la condición de que exista dos colores que ocurran una cantidad impar de veces. Para vértices de grado uno, el vecindario es monocromático. Por ello c es una coloración 2-impar de G . La desigualdad contraria no es siempre cierta. En la Figura 1.9 se ilustra un ejemplo.



Figura 1.9: A la izquierda se tiene un grafo G con una 4-coloración impar casi fuerte, que además cumple con ser una coloración 2-impar, mientras que a la derecha se ilustra G^2 con una coloración propia. Los números cromáticos respectivos para este grafo en particular son $\chi_{qso}^2(G) = 3$, $\chi_o^2(G) = \chi(G^2) = 4$

1.4. Resultados de este trabajo de título

El objetivo general de este trabajo de título es estudiar los números cromáticos impar casi fuerte y 2-impar en distintas clases de grafos planares.

Para ambas coloraciones, poco se sabe acerca del comportamiento de sus números cromáticos en subclases conocidas de grafos planares. Es por esto que este trabajo inicia con la obtención de cotas justas para los números cromáticos de interés, es decir χ_{qso} y χ_o^2 en las siguientes clases de grafos: ciclos, árboles, ruedas y escaleras de Möbius. Esta parte del trabajo de desarrolla a través del Capítulo 2, Sección 2.2.

Luego, se procede al análisis de subclases de grafos planares más generales. Es así como se llega a estudiar los grafos outerplanares, y en particular, a los grafos outerplanares maximales. Por la Proposición 1.5, las cotas obtenidas para el número cromático impar fuerte en grafos outerplanares [6] implican cotas para χ_{qso} , y de hecho por el método que se utilizó en [6] también implican cotas para χ_o^2 en dicha clase, y entonces se sabe que ambos número cromáticos están acotados por 8. En el Capítulo 4, Sección 4.1 se muestra que para ambas coloraciones 7 colores son suficientes.

En esta investigación se intenta bajar a 6 colores para la clase de grafos outerplanares, y en efecto se logra al poner la restricción de ser grafo outerplanar maximal. En consecuencia, el Capítulo 3 está dedicado a la clase de grafos outerplanares maximales, en donde es demostrado que en esta clase los número cromáticos impar casi fuerte y 2-impar son iguales (Sección 3.1.1), se ha logrado probar la cota 6 (Sección 3.3), y se ha demostrado que para grafos outerplanares maximales sin triángulos interiores la cota descende a 5 y es justa (Sección 3.4).

Para finalizar, se explora una clase de grafos planares más amplia, recordando que la mejor cota conocida en general para grafos planares considerando el número cromático impar fuerte es 388, la clase

de triangulaciones stack, una subclase de grafos planares maximales, pudiendo verificar una cota de 10 para toda la clase. Esto se encuentra en el Capítulo 4, Sección 4.2.

Capítulo 2

Estudio en subclases clásicas de grafos planares

2.1. Impar fuerte y 2-impar no son comparables en general

A modo complementario se tiene la siguiente proposición, la cual puede hacer comparación entre la coloración impar fuerte y la 2-impar, cuyo números cromáticos nos son comparables en la clases de todos los grafos, pero si en clases particulares como se verá específicamente en la Proposición 2.1, en conjunto de los estudios posteriores:

Proposición 2.1.

- Si G es cúbico, entonces $\chi_{so}(G) \leq \chi_o^2(G)$.
- Si G es par, entonces $\chi_o^2(G) \leq \chi_{so}(G)$

Demostración. Para un grafo cúbico se quiere mostrar que la coloración impar fuerte está acotada por la coloración 2-impar, esto se muestra considerando una coloración 2-impar en G , lo que genera que en cada vértice su vecindario tiene 3 colores distintos, lo cual a su vez indica que cada color aparece exactamente una vez, por lo tanto también es una coloración impar fuerte.

Para los grafos pares se quiere mostrar que la coloración 2-impar está acotada por la coloración impar fuerte. Tomando una coloración impar fuerte en G , se considera un vértice v , por propiedades de la coloración no puede ocurrir un único color en el vecindario de v , por lo tanto hay al menos dos colores una cantidad impar de veces en el vecindario, por lo tanto la coloración impar fuerte, es también una coloración 2-impar. $\square$

Se presentan ilustraciones para entender mejor las comparaciones de las coloraciones en estas dos clases de grafos. Para grafos cúbicos ver Figura 2.1, y para grafos pares la Figura 2.2

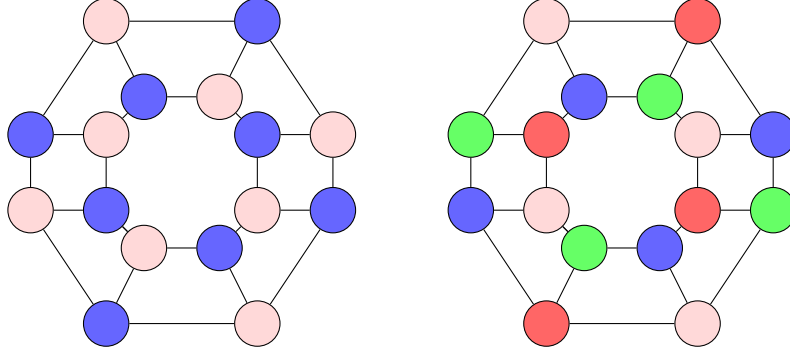


Figura 2.1: A la izquierda, la coloración impar fuerte, la cual también cumple con ser una coloración impar casi fuerte, dado que cada vértice cumple con la definición de ser de grado impar y vecindario monocromático. Se tiene que $\chi_{so}(G) = \chi_{qso}(G) = 2$, a la derecha se exhibe una coloración 2-impar, dado que se busca que cada vértice, dígame de v , tenga dos colores en el vecindario con ocurrencia impar, la propiedad fuerza a que cada vértice sea coloreado con un color distinto, dado que $d(v) = 3$. Así $\chi_o^2(G) = 4$

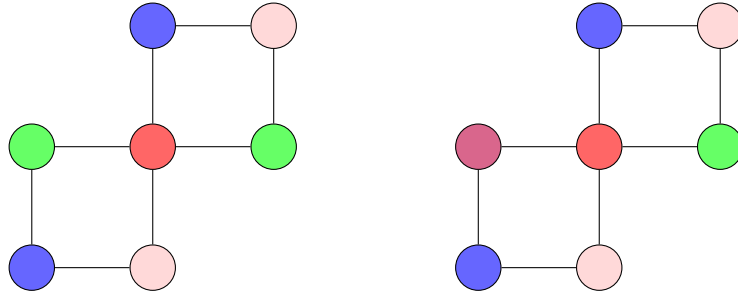


Figura 2.2: A la izquierda, se encuentra una coloración 2-impar con $\chi_o^2(G) = 4$, a la derecha, se tiene el mismo grafo pero esta vez coloreado con coloración impar fuerte, para el cual se puede ver que $\chi_{so}(G) = 5$, aquí se puede presenciar que la coloración impar fuerte también cumple con ser una coloración 2-impar, pero no se tiene al contrario.

2.2. Resultados en subclases de grafos planares

A partir de las coloraciones consideradas, se busca determinar cotas para los respectivos números cromáticos en distintas clases de grafos. El análisis se realizará inicialmente en clases que tienen estructura recursiva, tales como árboles, grafos unicíclicos, ruedas y escaleras de Möbius, para las cuales se presentan previamente las definiciones formales de cada una de estas estructuras.

Árbol Un *árbol* es un grafo T el cual cumple con ser acíclico (no posee ciclos) y conexo.

Uniciclo Un *Uniciclo* es un grafo G el cual es conexo y posee exactamente un ciclo.

Rueda Una *rueda* es un grafo que se obtiene al tener un ciclo, al cual se le agrega un vértice v en su cara interior, agregando las nuevas aristas entre v y a cada uno de los vértices del ciclo.

Escalera de Möbius El grafo W_{2n} se dice *escalera de Möbius* de orden $2n$, si este se obtiene a partir de

dos ciclos, el cual se indexa a cada uno de sus vértices por u_i y v_i , para cada ciclo respectivamente, donde se unen los vértices cuando $i = j$.

A continuación se presentarán cotas justas para cada una de las estructuras mencionadas anteriormente, para las coloraciones de interés, es decir, coloración impar casi fuerte y 2-impar.

Comenzando con la clase de árboles, primero se presentará la cota justa para la coloración impar casi fuerte.

Proposición 2.2. Sea T árbol, entonces $\chi_{qso}(T) \leq 3$

Demostración. Sea T un árbol, se fija un vértice v , como raíz del árbol, el cual tiene niveles $\{L_1, L_2, \dots, L_t\}$, donde t es la profundidad de este. Se tiene que el nivel $L_1 = N_G(v)$, luego $L_2 = N_G(L_1) - v$ hasta el último nivel i $L_i = N_G(L_{i-1}) - L_{i-2}$. Inicialmente sin pérdida de generalidad, se colorea v con 1, luego es necesario fijarse en el grado de v , si este es impar, todo el vecindario de v es monocromático (sin pérdida de generalidad, se llama 2). De caso contrario, el grado de v es par, para lo cual son necesario el uso de dos colores nuevos, cada uno una cantidad impar de veces, dígase 2 y 3.

Así, se van coloreando los vecindarios, a medida que se toma en cuenta el grado del vértice. Por lo tanto sea un vértice cualquiera x que se encuentra en el nivel L_2 , para colorear el nivel L_3 , se considera el grado de x . Si el grado de x es impar, se utiliza el mismo color que tiene la raíz del árbol (en este caso v). Por otro lado si tiene grado par, la raíz ya representa un color impar, y los vértices que pertenecen al nivel 3 son de cantidad impar, los cuales todos juntos van a atestiguar a x , a estos vértices ($N_G(x) - v$) se les prohíbe el color de v y x , por lo tanto se colorean con el tercer color disponible. Finalmente las hojas que tienen grado uno, por lo tanto su vecindario es monocromático. Al aplicar este método a L_i con $i \in \{3, \dots, t-1\}$ en orden se obtiene el coloramiento deseado. $\square$

La siguiente Figura 2.3 muestra un ilustración para los primeros 3 niveles del árbol.

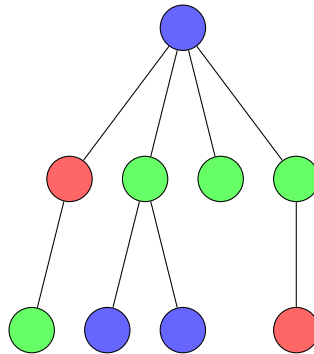


Figura 2.3: Ilustración de coloración impar casi fuerte en árboles

Explicando el método de coloreo anterior, respecto a la figura 2.3, primero se colorea la raíz del árbol T con color azul, luego como se tiene que el grado del vértice es 4, es necesario que se muestren dos colores con ocurrencia impar dentro de su vecindario, para la cual se distribuye un vértice, dígase x_1 con color rojo y x_2, x_3, x_4 son coloreados con verde. Luego a x_1 tiene grado dos, el cual ya tiene como testigo al padre, por lo tanto el vértice del nivel L_3 debe ser coloreado con un tercer color, que para ese caso es verde, luego el vértice x_2 tiene grado 3, al ser todo impar,

puede poseer su vecindario monocromático, por lo cual los vértices del tercer nivel se colorean con azul, que son el color del padre. Como x_3 no tiene descendencia, no hay nada más que colorear. Finalmente x_4 tiene grado 2, por lo cual hay que utilizar el color sobrante, que para ese vértice es rojo.

Continuando en la misma clase de grafos, se tiene la siguiente proposición para la coloración 2-impar:

Proposición 2.3. Sea T árbol, entonces $\chi_o^2(T) \leq 4$

En donde la demostración va a seguir una idea similar a la anterior, con la variante de que ahora no se permiten las coloraciones monocromáticas de vecindarios, a excepción de las hojas, por lo tanto van a ser obligatorios los dos colores con ocurrencia impar.

Demostración. Siguiendo la estructura inicial de la demostración anterior, primero se colorea la raíz del árbol, sin pérdida de generalidad con color 1, luego suponiendo el peor caso, el grado del vértice es impar, por lo cual son necesarios dos color para sus testigos, un color extra para los vértices restantes (dígase colores 1 y 2 para los colores que deben aparecer una cantidad impar de veces en el vecindario y 3 para los vecinos restantes de la raíz), por lo tanto en caso de grado impar, son necesario 4 colores para que la coloración sea correcta ,luego el siguiente nivel, se puede abastecer de los tres colores sobrantes para colorear a sus vecinos, utilizando el mismo método mencionado anteriormente, y siguiendo la idea hacia todos los niveles de T , 4 colores son suficientes para poder colorear un árbol de manera correcta con una coloración 2 impar fuerte. $\square$

A continuación en la Figura 2.4 se muestra la ilustración para los primeros niveles del árbol.

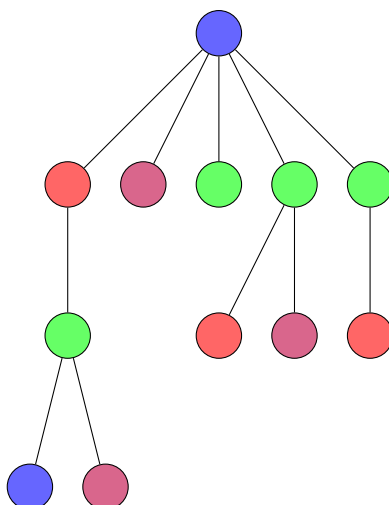


Figura 2.4: Ilustración de coloración 2-impar fuerte en árboles

Continuando con la clase de uniciclos, se tiene que para ambas coloraciones la cota encontrada es la misma, mas no utilizan exactamente el mismo método de coloreo, dado que los árboles no se colorean de la misma manera para ambas coloraciones.

Proposición 2.4. Sea G un unicyclo, se tienen las siguientes desigualdades:

- $\chi_{qso}(G) \leq 5$
- $\chi_o^2(G) \leq 5$

Demostración. Sea G un grafo con exactamente un ciclo C de tamaño k , donde sus vértices están ordenados de la siguiente manera $C = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$

Para la primera parte se colorea de forma correcta el ciclo utilizando la menor cantidad de colores posibles, es decir, a lo más cinco colores, que es el caso del pentágono, aquí ambas coloraciones coinciden. Es claro que hay árboles que nacen de cada uno de los vértices del ciclo, es decir, cada vértice del ciclo es la raíz de un árbol distinto. Sea $x \in C$, se verifica el grado del vértice y se colorea el vecindario dependiendo de la coloración que se esté utilizando, donde los vecinos de x en el ciclo, se consideran como vecinos colorados del segundo nivel del árbol, pero no se debe contemplar la descendencia de los vecinos en el ciclo. De esta manera se colorea la estructura completa de los k árboles, precisando la coloración que se esté trabajando. $\square$

A continuación en la Figura 2.5 se muestra la ilustración para la coloración impar casi fuerte, mientras que en 2.6 se muestra para la coloración 2-impar.

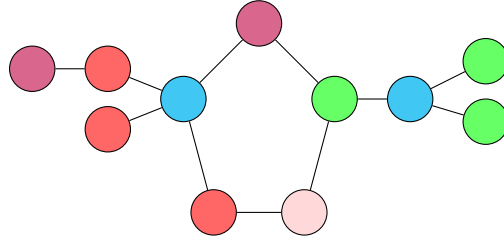


Figura 2.5: Ejemplificación de coloreo impar casi fuerte en unicyclos.

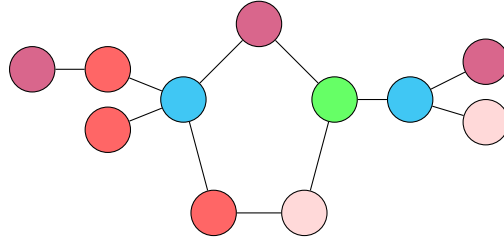


Figura 2.6: Ejemplificación de coloreo 2 impar en unicyclos.

Como se puede apreciar en las figuras, la coloración de los ciclos es la misma, luego para cada vértice que posee descendencia se colorea con el método de árbol mencionado anteriormente dada su respectiva coloración.

Proposición 2.5. Sea G una rueda, entonces $\chi_o^2(G) = \chi_{qso}(G) \leq 6$

Demostración. Dada la estructura del grafo, cada vecino del vértice en el ciclo tiene grado 3, mientras que el vértice central tiene grado k , donde k es el largo del ciclo. Dado que no puede haber vecindario

monocromático, ambas coloraciones coinciden. Se enumeran los vértices que generan el ciclo de manera ordenada, $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, y se colorea de la siguiente x_1 a x_5 utilizando 5 colores ordenadamente. Luego para los vértices desde x_6 hasta x_k se colorean con la tripleta, 3, 4, 5, así se asegura que siempre habrán dos colores con una ocurrencia impar para el vértice central v . Se agrega el color 6 para el vértice v . $\square$

En la siguiente Figura 2.7, se ilustra el algoritmo de coloreo.

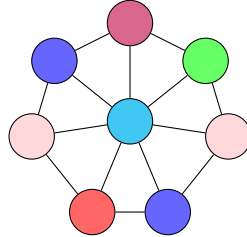


Figura 2.7: Ejemplo de ambas coloraciones para la rueda.

Se puede apreciar que para la rueda de largo 7 se colorea con los primeros 5 colores, desde el vértice coloreado con magenta, hasta el coloreado de rojo, luego se debe comenzar a repetir la tripleta rosado, azul, rojo. Dado el largo del ciclo, solo se repite rosado y rojo y luego se colorea el vértice central con cian, que representa al sexto color, para tener toda la estructura coloreada.

Luego para la escalera de Möbius se presenta la siguiente proposición, la cual tiene tres items, dependiendo de la paridad del ciclo de la estructura.

Teorema 1. Para $n \in \mathbb{N}$, sea W_n la rueda formada por dos ciclos de largos n . Lo siguiente es cierto.

1. Si $n = 3$, entonces $\chi_{qso}(W_n) = 6$.
2. Si n es par, entonces $\chi_{qso}(W_n) = 2$ y $\chi_o^2(G) = 4$.
3. Si n es impar mayor que 3, entonces $\chi_{qso}(W_n) = 5$.

Esta demostración se presentará en distintas partes, con el fin de poder ilustrar inmediatamente cada uno de los puntos mencionados.

Demostración. Como W_n es una escalera de Möbius y este es un grafo cúbico, por lo tanto cualquier vértice v , $d(v) = 3$, luego la demostración se divide en los tres casos descritos en la afirmación.

1. Si $n = 3$, dada la estructura del grafo, cada uno de los vértices debe ser de colores distintos, por lo tanto, son necesarios 6 colores, debido a que si se intentara colorear con menos colores, alguno de los vértices no cumpliría con la propiedades de las coloraciones, ya sea que pierde ser una coloración propia, o bien ve a un solo color en su vecindario. Ver Figura 2.8.

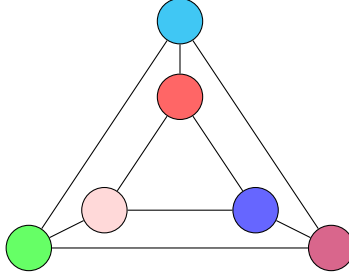


Figura 2.8: Coloración para el ciclo de largo 3. Debe ser de esta manera debido a que los tres vértices del ciclo externo deben ser diferentes (al igual que los de ciclo interno) y al querer repetir uno de los colores de un vértice del ciclo externo, en uno de los vértices del ciclo interno, digase v sucedería una de las dos opciones v no cumple con la propiedad de ser coloración propia o v no tiene dos colores distintos en su vecindario.

Como se ve en la Figura 2.8, cada vértice es vecino de los otros dos vértices del ciclo, además de uno del ciclo opuesto, lo que hace que estructuralmente se tengan triángulos y no cuadrados como se verá a continuación.

2. En este caso, la rueda está formada por dos ciclos de largo par, en donde como el largo es mínimo 4, se forman cuadrados dentro de la estructura y no triángulos como se vio anteriormente. Primero se va a describir la coloración impar casi fuerte. Sin pérdida de generalidad se colorea un vértice cualquiera con color 1, y a todo su vecindario se colorea monocromáticamente con 2, luego para todos los vértices coloreados de 2, se revisa su vecindario y se hace este monocromático con 1, hasta completar el grafo, esto es posible, dado que todos los vértices tienen grado impar, y el vecindario de un vértice no es adyacente entre sí.

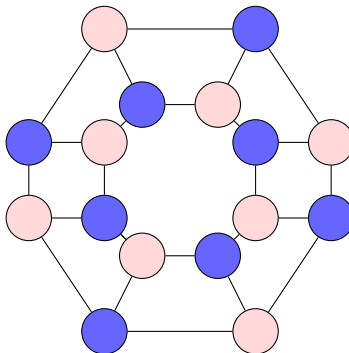


Figura 2.9: Ejemplo de una coloración impar casi fuerte para la rueda W_8 .

Ahora, se va a describir la coloración 2-impar. Para este caso primero se le entrega una etiqueta a cada vértice del ciclo externo, v_i , con $i = 1, \dots, n$, donde n es el tamaño de los ciclos, y u_j con $j = 1, \dots, n$, a cada uno de los vértices del ciclo interno, de manera que v_i es adyacente a u_j cuando $i = j$, así se forman ciclos de tamaño 4, por todo el grafo, de manera ordenada llamaremos **arista libre** a la arista generada por la adyacencia de v_i y u_j . El método de coloreo es el siguiente (ver Figura 2.10): sin pérdida de generalidad al vértice v_1 se le asigna el color 1, v_2 color 2, u_1 color 3 y u_2 color 4, de manera que el ciclo generado por estos vértices, tiene sus 4 vértices de colores distintos. Además sus aristas libres, en sus extremos ven los pares de colores $\{1,3\}$ y $\{2,4\}$. Luego para el vértice v_2 , en su vecindario ya ve los colores 1 y 4, por lo tanto el color disponible para su tercer vecino v_3 es 3, utilizando el mismo razonamiento u_3 es coloreado con 1. Siguiendo este procedimiento, la siguiente arista libre va a

ser coloreada con $\{2,4\}$ y ya habrían dos ciclos de tamaño 4 coloreados. Dado que el largo del grafo es par, se puede siempre tener estos ciclos c_4 de manera que se pueda colorear correctamente todo el grafo.

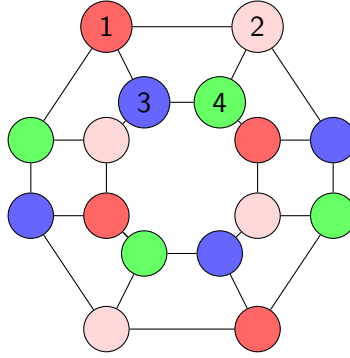


Figura 2.10: Ejemplo de una coloración 2-impar para la rueda W_8

3. En este caso, la rueda está formada por dos ciclos de largo impar. Primeramente se aplica la misma estrategia que la utilizada para la coloración de Ruedas de ciclo par para la coloración 2-impar. Se utiliza esta estrategia hasta que el grafo posea 3 aristas libres sin sus extremos coloreados, luego a los vértices u_{n-2} y v_n se les entrega el color 5, y así el vértice u_n está forzado a ser coloreado con 2, luego quedan 3 colores disponibles para colorear los 3 vértices restantes, los cuales están forzados a ser coloreados de una de las dos maneras siguientes:

- a el vértice u_{n-2} es adyacente a un vértice coloreado con 4, entonces los vértices disponibles se deben colorear de la siguiente manera $c(v_{n-2})=3$, $c(v_{n-1})=4$, $c(u_{n-1})=1$.
- b el vértice u_{n-2} es adyacente a un vértice coloreado con 2, entonces los vértices disponibles se deben colorear de la siguiente manera $c(v_{n-2})=1$, $c(v_{n-1})=3$, $c(u_{n-1})=4$.

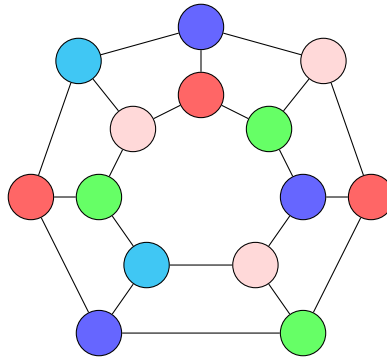


Figura 2.11: La rueda W_7 coloreada para ambas coloraciones.

□

Capítulo 3

Coloraciones en grafos outerplanares maximales

En este capítulo se hará un estudio de la coloración impar casi fuerte y coloración 2-impar, en la clase de grafos outerplanares maximales. A estos se les conoce de diferentes formas dentro de la literatura. Algunos ejemplos de ellos son triangulación outerplanar, grafos 2-árboles.

En la Sección 3.1 se comenzará mostrando algunas propiedades fundamentales de los grafos outerplanares maximales, las cuales a futuro ayudarán a comprender que para ambas coloraciones, sus respectivos números cromáticos son iguales en la clase de outerplanares maximales, lo que se tiene dada la estructura de construcción del grafo. Posteriormente en la Sección 3.2 se tiene la construcción recursiva de grafos outerplanares maximales, en donde se comienza desde un triángulo y se va construyendo a partir de dos operaciones. En la Sección 3.3 se va a presentar la demostración de la cota igual a 6 para el número cromático de las coloraciones de interés para los grafos outerplanares maximales, para finalmente mostrar en la Sección 3.4 algunos ejemplos de subclases de grafos outerplanares maximales, los cuales se construyen de reiterar una misma operación de las mencionadas en la Sección 3.2, se muestra que la cota del número cromático para estos grafos es 5 y además la cota es justa.

Se recuerda la siguiente definición con el fin de una mejor comprensión a lo largo del capítulo:

Outerplanar maximal Sea G un grafo outerplanar, este es *maximal* si todas sus caras interiores están trianguladas. En particular, la cara externa es un ciclo que contiene a todos los vértices del grafo. Los grafos outerplanares maximales son aquellos grafos outerplanares para los cuales si se les agrega una nueva arista el grafo deja de ser outerplanar.

Se introduce la definición de testigos, la cual será utilizada a lo largo de las operaciones, condiciones y demostraciones del capítulo.

Testigo Dada una k -coloración propia c de G , $c : V \rightarrow [k]$, ya sea una k -coloración impar casi fuerte o 2-impar, y dado un vértice $v \in V(G)$, se dice que el subconjunto $S \subseteq \{1, \dots, k\}$ es el conjunto de testigos de v bajo c si: $i \in S$ sí y solo si el color i aparece una cantidad impar de veces en el vecindario de v , en otras palabras $|\{u \in N_G(v) : c(u) = i\}|$ es impar. El conjunto de testigos de v bajo c es denotado por T_v

3.1. Propiedades de grafos outerplanares maximales

En esta sección serán mostradas algunas de las propiedades básicas que ayudarán con la demostración de la igualdad de números cromáticos entre las coloraciones impar casi fuerte y 2-impar. Lo cual será utilizado más adelante para demostrar la cota igual a 6 del número cromático de interés en la clase de grafos outerplanares maximales.

Se sabe que los grafos outerplanares tienen degeneración a lo más 2 [19], y por lo tanto siempre tienen un vértice de grado a lo más 2. Sin embargo, por completitud, se va a presentar un argumento de esto para los grafos outerplanares maximales.

Proposición 3.1. *Todo grafo G outerplanar maximal que tiene $|V(G)| \geq 4$ tiene un vértice v que satisface :*

(1) $d_G(v) = 2$,y

(2) $G - v$ es un grafo outerplanar maximal.

Demostración. Considerando que existe al menos un vértice v de grado dos, se procede a demostrar que $G - v$ sigue siendo outerplanar maximal, se debe considerar que el vértice v de grado 2, genera exactamente un triángulo, el cual al ser removido, no modifica ninguna cara interior, debido a que quien es modificada es la cara exterior, dado que hay un vértice menos en ella, luego el grafo $G - v$ sigue siendo outerplanar maximal debido a que se sigue cumpliendo la definición. $\square$

3.1.1. Igualdad de números cromáticos impar casi fuerte y 2-impar.

Dada la estructura de los grafos outerplanares maximales, se puede demostrar lo siguiente:

Teorema 2. *Sea G un grafo outerplanar maximal, entonces $\chi_{qso}(G) = \chi_0^2(G)$*

Para la demostración del Teorema 2, es necesario el lema que será presentado a continuación. Un resultado (más fuerte) que implica este lema se encuentra en [20].

Lema 1. *Sea G un grafo outerplanar maximal con su dibujo en el plano, y sea v cualquier vértice. Entonces, el vecindario de v forma un camino.*

Ahora ya se puede demostrar el Teorema 2.

Demostración Teorema 2. Por Proposición 1.6 se tiene que $\chi_{qso}(G) \leq \chi_0^2(G)$. Entonces para concluir el teorema basta probar la desigualdad contraria. Para esto, procediendo por contradicción, se va a suponer que existe c una coloración impar casi fuerte de G , tal que c no es una coloración 2-impar.

Utilizando esta suposición y las definiciones de ambas coloraciones, se tiene que existe un vértice $v \in V(G)$ con $d(v)$ impar y $d(v) \geq 3$ tal que $c(x) = c(y) \ \forall x, y \in N_G(v)$, como se ve en la figura 3.1.

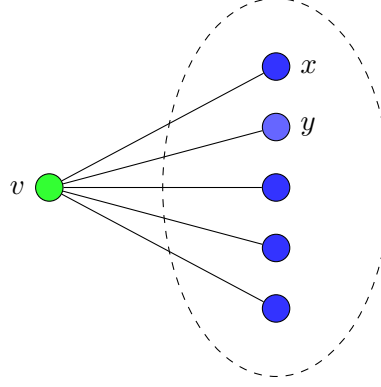


Figura 3.1: Ilustración del vecindario monocromático de v .

En particular, dado que c es una coloración propia, el conjunto de vecinos de v debe ser independiente. Sin embargo, por el Lema 1, los vecinos de v forman un camino, lo cual lleva a una contradicción. Así, se concluye que $\chi_{qso}(G) = \chi_o^2$. $\square$

3.2. Construcción recursiva de los grafos outerplanares maximales.

En esta sección se estudiará una construcción recursiva para los grafos outerplanares maximales los cuales ayudarán a tener una mejor comprensión de la estructura que se presenta a medida que se construye el grafo. Se considerarán ciertas operaciones para poder explicar lo mencionado, las cuales son tomadas del artículo de Jiménez et. al. [21].

Primero se introducen dos operaciones básicas las cuales al repetirlas, permiten ir construyendo recursivamente los grafos outerplanares maximales sin triángulos internos. Luego, se describe una tercera operación la cual permite obtener la clase completa.

Comenzando se tienen dos operaciones básicas, las cuales se diferencian en el lado en el que se genera la acción.

Para lo siguiente se debe considerar $G = (V, E)$ un grafo outerplanar maximal, y la arista de G sobre la cual se decide volver a aplicar la operación se le denota por $\lfloor G \rfloor$ y se le llama borde. Sea C_n todos los grafos outerplanares maximales en n vértices y se denota como $\Delta(C_n)$ a la cara exterior de G . Con estas definiciones se presentan ahora las siguientes operaciones:

Algoritmo Operación 1:

Input: $(G, \lfloor G \rfloor)$ donde $G \in \Delta(C_n)$ y $\lfloor G \rfloor = (\beta_1, \beta_2)$

Output: $(\hat{G}, \lfloor \hat{G} \rfloor)$ donde $\hat{G} \in \Delta(C_{n+1})$ es un grafo outerplanar maximal obtenido de G añadiendo un nuevo vértice $\hat{\beta}_1$ a G , y dos nuevas aristas $\{\hat{\beta}_1, \beta_1\}$ y $\{\hat{\beta}_1, \beta_2\}$. Más aún, $\lfloor \hat{G} \rfloor = (\hat{\beta}_1, \beta_2)$.

Algoritmo Operación 2:

Input: $(G, \lfloor G \rfloor)$ donde $G \in \Delta(C_n)$ y $\lfloor G \rfloor = (\beta_1, \beta_2)$

Output: $(\hat{G}, \lfloor \hat{G} \rfloor)$ donde $\hat{G} \in \Delta(C_{n+1})$ es un grafo outerplanar maximal obtenido de G añadiendo un nuevo vértice $\hat{\beta}_2$ a G , y dos nuevas aristas $\{\beta_1, \hat{\beta}_2\}$ y $\{\hat{\beta}_2, \beta_2\}$. Más aún, $\lfloor \hat{G} \rfloor = (\beta_1, \hat{\beta}_2)$.

Ahora sea G_0 una arista, dígase $\lfloor G \rfloor$ es la arista inicial de G , denotada por $\lceil G \rceil$.

Las operaciones anteriores están representadas en la figura 3.2



Figura 3.2: Representación Operación 1 y Operación 2 para grafos outerplanares maximales.

Luego se debe considerar que haya al menos una cara interna en el grafo G y es así como se define la siguiente operación.

Algoritmo Operación 3 (•):

Input: $(G_i, [G_i])$ donde $G_i \in \Delta(C_{n_i})$, $i \in \{1, 2\}$ y $[G_i] = (\beta_1^i, \beta_2^i)$

Output: $(G, [G])$, donde $G \in \Delta(C_{n_1+n_2-1})$ es un grafo outerplanar maximal obtenido de G_1 y G_2 identificando β_1^2 con β_2^1 y añadiendo la arista $\{\beta_1^1, \beta_2^2\}$. Aún más, $[G] = (\beta_1^1, \beta_2^2)$

La representación se ve en la Figura 3.3:

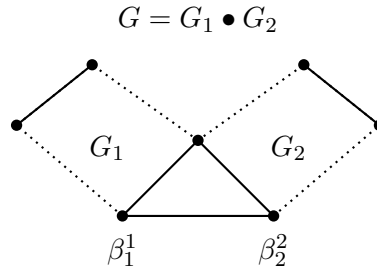


Figura 3.3: Representación de Operación 3 para grafos outerplanares maximales.

En el siguiente teorema, el cual es recopilado del artículo de Jiménez et al. [21] se concluye la construcción recursiva de los grafos outerplanares maximales.

Teorema 3. *Todo grafo outerplanar maximal se puede obtener a partir de una arista inicial mediante la aplicación iterada de operación 1, operación 2 y operación 3.*

3.3. Estudio en grafos outerplanares maximales

Al considerar un grafo G outerplanar maximal, hay 3 afirmaciones que se pueden realizar

Afirmación 1. *Como se vio anteriormente en la Proposición 1.6 $\chi_{qso}(G) = \chi_0^2(G)$*

Afirmación 2. *En la cara externa de G existe un vértice v de grado 2, lo cual es equivalente a decir que 2 aristas ven la cara exterior, lo que fue demostrado en la proposición 3.1*

Afirmación 3. Por definición de grafo outerplanares maximal, se sabe que las caras interiores se clasifican en dos tipos:

- **Interior:** Ninguna arista del triángulo está en la cara externa.
- **Externos:** Al menos una arista del triángulo está en la cara externa.

Se busca poder demostrar que los números cromáticos de la coloración impar casi fuerte y coloración 2-impar son acotados por 6, para lo cual presenta el siguiente teorema:

Teorema 4. Para todo G outerplanar maximal, $\chi_{qso}(G) = \chi_o^2(G) \leq 6$

Demostración. La siguiente demostración va a proceder por inducción en la cantidad de vértices del grafo. Es decir, se va a probar la siguiente afirmación:

Si G es un grafo outerplanar maximal con n vértices, entonces $\chi_{qso}(G) = \chi_o^2(G) \leq 6$.

Para el caso base: $n = 3$

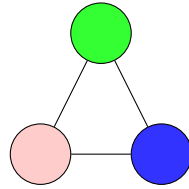


Figura 3.4: Estructura caso base $n = 3$

Dada la Afirmación 1 la igualdad del número cromático de ambas coloraciones, para esta demostración se hablará sólo de coloración para abarcar ambas, dado que sus números cromáticos no presentan diferencias.

Basta con la coloración propia, para mostrar que ambas son iguales, debido a que todos los nodos deben ser coloreados con colores distintos, cumpliendo tanto con la definición de coloración propia, como con la de coloración impar casi fuerte y coloración 2-impar.

Ahora se va a suponer que G es un grafo outerplanar maximal, con $n \geq 4$ vértices. Por la Proposición 1.6, existe en G un vértice v con $d_G(v) = 2$. Por lo tanto se va a considerar el grafo $G' = G - v$ que se presenta en la Figura 3.5, que es un grafo outerplanar maximal y que por lo tanto, por hipótesis inductiva satisface las condiciones del Teorema 4. Sea c una coloración de G' con 6 colores.

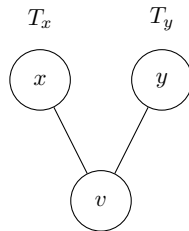


Figura 3.5: Estructura del grafo $G' = G - v$

Se va a considerar la siguiente notación (ver Figura 3.5). Como se ve en la Figura 3.5, se consideran los nodos x, y vecinos de v en G donde cada uno de ellos está coloreado con un color dentro del conjunto

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, considerando que son distintos, por formar una arista (arista xy). Para los nodos x e y , se consideran dos conjuntos de testigos, T_x, T_y respectivamente, los cuales muestran los colores que testifica la propiedad de la coloración c en G' para cada uno de los vértices.

Se puede hacer la siguiente afirmación:

Afirmación 4. *El único caso bajo permutación, en el que no hay una extensión directa de c al grafo G (es decir, colorear correctamente v al reinsertarlo) es cuando $T_x = \{1, 2\}, T_y = \{3, 4\}, c(x) \notin T_y, c(y) \notin T_x$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad dígame que $c(x) = 5, c(y) = 6$ por lo tanto, se tienen ya los seis colores $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ utilizados por x, y y los testigos T_x, T_y . Por contradicción se supone que los colores utilizados para $c(x), c(y), T_x, T_y$ no son todos los colores disponible en el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Caso 1: $c(x) \in T_y$ o $c(y) \in T_x$. Sin pérdida de generalidad dígame que $c(x) \in T_y$, y se verá primero el caso en que se tiene lo siguiente $T_x = \{1, 2\}, T_y = \{c(x), 3\}, c(y) \notin T_x$, considerando igual que anteriormente $c(x) = 5, c(y) = 6$, por lo tanto se han utilizado los colores $\{1, 2, 3, 5, 6\}$ del conjunto completo de colores, dejando disponible el color 4 para poder colorear el vértice v al ser reintegrado. Ahora si sucede que $c(x) \in T_y$ y $c(y) \in T_x$, y los conjuntos de testigos tienen exactamente 2 elementos, por lo visto anteriormente quedan dos colores disponible en vez de uno.

Si sucediera que $c(x) \in T_y$ y/o $c(y) \in T_x$, y al alguno de los conjuntos de testigos T_x, T_y tiene al menos 3 colores, puede suceder que queden colores sin utilizar, como se mencionó anteriormente, o bien están todos los colores utilizados, porque los conjuntos de testigos poseen los suficientes elementos como para poder colorear con uno de ellos v y no arruinar la propiedad de la coloración.

Caso 2: El Caso 1 no ocurre, y alguno de los conjuntos de testigos T_x, T_y tiene al menos 3 elementos. Viendo primero la siguiente estructura, sin pérdida de generalidad es $T_x = \{1, 2, 3\}, T_y = \{3, 4\}, c(x) = 5 \notin T_y, c(y) = 6 \notin T_x$. Dado que por definición de las coloraciones basta que cada vértice tenga 2 testigos, es posible utilizar un color que pertenece a T_x pero que no pertenezca a T_y , por lo tanto el vértice v se podría colorear con 1 o 2 y así se satisface la propiedad.

En caso de que ambos conjuntos de testigos tuvieran al menos tres elementos, habrían más opciones para escoger para colorear v al ser reintegrado.

Por lo tanto el único caso que genera problemas para poder reintegrar v es el mencionado en la Afirmación 4. $\square$

Por la Afirmación 4 se puede asumir que c es una coloración de G' donde sucede $T_x = \{1, 2\}, T_y = \{3, 4\}, c(x) \notin T_y, c(y) \notin T_x$. El triángulo que contiene a la arista xy en G' , el cual se va denotar como Δ_{xy} puede ser de una de las opciones entregadas anteriormente en la Afirmación 3:

- Δ_{xy} externo en G
- Δ_{xy} interno en G

Primero se va a estudiar el caso en que Δ_{xy} , con sus vértices x, y, z es triángulo externo en G , para lo cual se presenta la Figura 3.6.

A lo largo de esta demostración por simplicidad se entenderá como triangulación a los grafos outerplanares maximales.

En este caso, como se tiene que la arista xy no es incidente a la cara externa en G , y se tiene que al menos una de las aristas xz o yz , sin pérdida de generalidad dígame yz , es incidente en la cara externa, por lo tanto los únicos vecinos de y en el grafo G' son x y z . Lo cual implica que el conjunto $T_y = \{c(x), c(z)\}$ lo cual es una contradicción al supuesto de que los colores de x, y no se ven como testigos, contradiciendo la coloración asumida inicialmente.

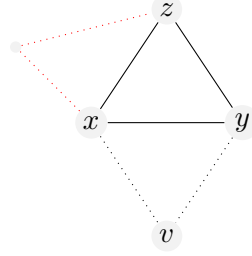


Figura 3.6: Representación del triángulo Δ_{xy} en G , en caso de que Δ_{xy} es un triángulo externo en G

Ahora se estudiará el caso en que Δ_{xy} es triángulo interno en G , se tiene la siguiente estructura, la cual por Teorema 3 se puede considerar que viene de una operación 3, en donde T_1 y T_2 son las triangulaciones que se unirán con sus respectivos bordes $\{x, z\}$ e $\{y, z\}$, de ellos se considerarán nuevos vecinos y bordes, lo anterior se representa a continuación en la Figura 3.7:

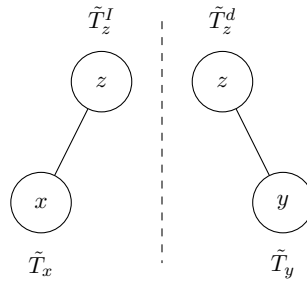


Figura 3.7: A partir de G' se obtienen los grafos outerplanares maximales T_1, T_2 , borrando xy y duplicando el vértice z . Esto puede ser visto como aplicar la operación 3 considerando las triangulaciones T_1 y T_2 con sus bordes $\{x, z\}$ e $\{y, z\}$, respectivamente, para dar lugar a la triangulación G' con borde $\{x, y\}$.

A lo largo de la demostración, se considerará sin pérdida de generalidad y bajo permutación $c(x) = 5, c(y) = 6$. Se consideran los conjuntos de testigos como $\tilde{T}_z^I$, por izquierda, es decir, que viene del grafo T_1 y $\tilde{T}_z^d$, por derecha, correspondiente al grafo T_2 en G' , $\tilde{T}_x, \tilde{T}_y$ testigos de x, y respectivamente en los grafos T_1, T_2 , esto sucede antes de hacer la unión de ambas triangulaciones (o bien después de haber separado el grafo G'). Así, el vecindario de z en G' está dado por $N_{G'}(z) = N_{G'}^i(z) + N_{G'}^d(z)$, donde $N_{G'}^i(z) = N_{T_1}(z)$, y $N_{G'}^d(z) = N_{T_2}(z)$. Además, cada color en T_z aparece una cantidad impar de veces en $N_{G'}(z)$ y por lo tanto cada color en T_z aparece una cantidad impar de veces en $N_{T_1}(z)$ o bien en $N_{T_2}(z)$, pudiendo concluir que

$$T_z = \tilde{T}_z^i \Delta \tilde{T}_z^d$$

donde Δ representa la operación de diferencia simétrica entre conjuntos. De manera directa se obtiene también que $\tilde{T}_x = \{1, 2, 6\}$ y $\tilde{T}_y = \{3, 4, 5\}$. Sin pérdida de generalidad se asumirá que z está coloreado con color 1. Cabe mencionar que la coloración c no es necesariamente una coloración correcta en T_1 y T_2 puesto que es posible que el vértice z no cumpla con la condición que hay dos colores que aparecen una cantidad impar en su vecindario (sin embargo, todos los otros vértices de los grafos T_1, T_2 si cumplen la condición).

La estrategia principal de esta parte del paso inductivo es realizar una permutación de colores ya sea en T_1 o en T_2 , modificando así la coloración c , de manera que al realizar la operación 3 y así recuperar el grafo G' se obtenga una coloración correcta pero ahora con colores de borde que se puedan extender a v (es decir distinta a la de la Afirmación). Considerando la operación 3 para los grafos

outerplanares maximales, hay tres condiciones que se deben cumplir para que la coloración obtenida después de permutar y realizar la operación 3 sea correcta:

- **Condición 1:** $|\tilde{T}_z^i \Delta \tilde{T}_z^d| \geq 2$. (Para asegurar que z tenga al menos 2 testigos)
- **Condición 2:** $|\tilde{T}_x| \geq 2$, y si $|\tilde{T}_x| = 2$, entonces $c(y) \notin \tilde{T}_x$. (Para asegurar que x tenga al menos 2 testigos)
- **Condición 3:** $|\tilde{T}_y| \geq 2$, y si $|\tilde{T}_y| = 2$, entonces $c(x) \notin \tilde{T}_y$. (Para asegurar que y tenga al menos 2 testigos)

Se va a separar la demostración en tres casos a estudiar, los cuales tienen que ver con la cantidad de colores utilizados en los bordes de T_1 , T_2 por el color de los vértices y por los testigos.

Caso 1 Cada borde de T_1 y T_2 , utiliza exactamente 6 colores, lo que se representa visualmente en la estructura que se presenta a continuación en la Figura 3.8

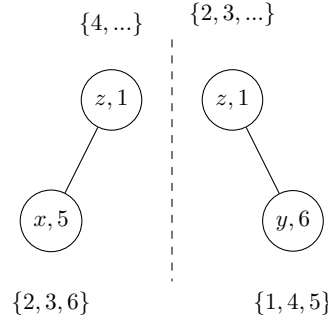


Figura 3.8: Estructura Caso 1 antes de hacer operación 3. Se identifica dentro del nodo el nombre del vértice y su respectivo color. Ejemplificando para $\{z, 1\}$, el vértice z está coloreado con color 1.

En la Figura 3.8 y posteriormente en las otras figuras se hace uso de '...' dentro de los conjuntos de testigos para expresar que pueden haber más elementos en el conjunto de los testigos, pero que al menos se encuentran los elementos mencionados.

Como se puede ver en la Figura 3.8, los bordes de ambos lados hacen uso de exactamente los 6 colores, los cuales son divididos entre colorear sus vértices y testificar que estos cumplan la definición de la coloración en estudio, cabe destacar que es posible que un mismo color sea utilizado para colorear un vértice a la vez que es elemento del conjunto de testigos de otro vértice, por ejemplo, utilizando la Figura 3.8 vista anteriormente, el color 1 es utilizado para colorear el vértice z y a su vez pertenece al conjunto de testigos $T_y = 1, 4, 5$. Para poder trabajar este caso y obtener un borde adecuado luego de realizar la operación 3, se va a realizar una permutación al lado derecho en T_2 , intercambiando los colores 6 por los colores 4, es decir, ahora el vértice y estaría coloreado por 4 y en el conjunto de testigos, también se debe hacer la permutación de los colores (se realiza la permutación en todo el grafo T_2). Con la acción realizada anteriormente se obtienen coloraciones de T_1 y T_2 que satisfacen las condiciones 1, 2 y 3 siempre y cuando el grupo de testigos z para cada triangulación no difieran exactamente en los dos colores 4 y 6 (en particular, esto asegura que z tiene al menos dos testigos después de realizar la

operación 3) descritas anteriormente, por lo que se puede aplicar operación 3 sin crear problemas con la nueva coloración, y además se obtiene que el borde $\lfloor G' \rfloor$ no es el descrito en la Afirmación 4. Ver Figura 3.9. Entonces, la nueva coloración que se obtiene en G' se puede extender a G .

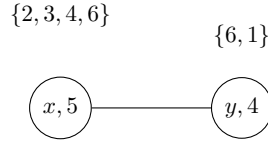


Figura 3.9: Borde $\lfloor G' \rfloor$ para caso 1 después de realizar la permutación y operación 3.

Para el caso particular de cuando sucede el caso en donde el grupo de testigos z para cada triangulación antes del pegado difieren exactamente en los dos colores permutados, se ve que se siguen utilizando 6 colores en ambos lados, como es presentado en la Figura 3.10:

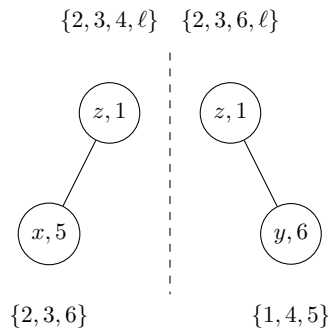


Figura 3.10: Caso no resuelto dentro de Caso 1. El color ℓ si es que existe es 5, o bien no existe.

Para este caso, la permutación de colores realizada anteriormente (intercambiar el color 4 por 6), generaría problemas en la condición 1, debido a que se permuta solo en una de las triangulaciones. Entonces en vez de permutar 4 por 6 se va a permutar el color 2 por el 5 al lado derecho, en T_2 , y así se verifican las tres condiciones que permiten realizar la operación 3 de manera correcta, lo cual entrega la estructura de bordes presentada a continuación en la Figura 3.11:

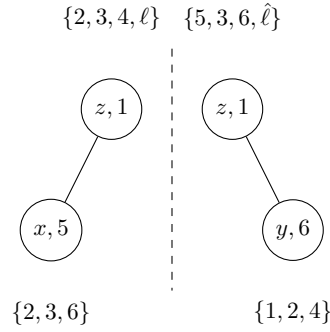


Figura 3.11: Estructura de bordes después de permutar. Los colores ℓ y $\hat{\ell}$ podrían existir o no. Si existen son $\ell = 5$ y $\hat{\ell} = 2$.

Como no puede suceder ningún otro inconveniente en este caso, se obtiene el borde $[G']$ presentado en la Figura 3.12

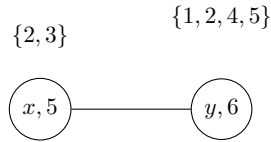


Figura 3.12: Borde final con el cual se trabaja, el cual proviene de considerar el caso no resuelto del Caso 1.

Dado el borde final presentado se puede hacer la extensión de la coloración c de G' a G por lo visto en la Afirmación 4.

Caso 2: Para este caso se considera que los bordes de cada lado usan exactamente 5 colores (de manera análoga se puede realizar caso en que la izquierda usa 5 colores y la derecha 4 colores). Se presenta la Figura 3.13, para mejor comprensión del caso.

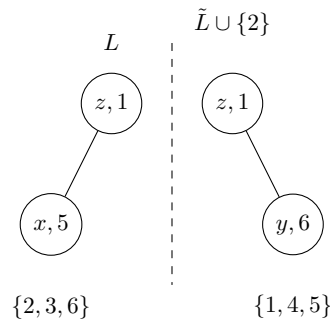


Figura 3.13: Estructura inicial, sin pérdida de generalidad, para el caso 2, antes de generar la operación 3. Los conjuntos de testigos L y $\tilde{L} \cup \{2\}$ difieren en al menos 2 por lo cual no pueden ser iguales y alguno de ellos podría ser incluso vacío, además $4 \notin L$ y $3 \notin \tilde{L}$, por condición del Caso 2.

Se sabe que los conjuntos L y $\tilde{L} \cup \{2\}$ difieren en al menos dos colores. Si suponemos que esta diferencia simétrica es distinta de $\{4, 6\}$, entonces como al lado izquierdo no se utiliza el color 4, se hace a la permutación del color 6 por el color 4 al lado izquierdo, y con eso basta para que la operación 3 se pueda realizar sin ningún problema, y se obtenga un borde final correcto distinto del descrito en la Afirmación 4. Ahora, si la diferencia simétrica es exactamente $\{4, 6\}$, y $4, 6 \in \tilde{L}$, se procede de la misma manera.

Ahora, si la diferencia simétrica es exactamente $\{4, 6\}$, y $6 \in L$, $4 \in \tilde{L}$, entonces no se realiza la permutación de colores 4 por 6 a la izquierda. Como la diferencia simétrica es exactamente $\{4, 6\}$, se sabe que $2 \in L$, y se efectúa la permutación de 4 por 2 a la izquierda. En tal caso la condición 1 no se arruina y se conservan las condiciones de la operación 3 de manera óptima.

Se concluye con uno de los bordes que se generan son los descritos a continuación en la Figura 3.15, los cuales representan a cada uno de los casos mencionados anteriormente.

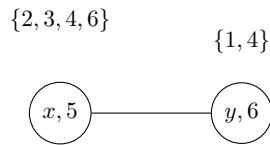


Figura 3.14: Opción 1, borde final caso 2

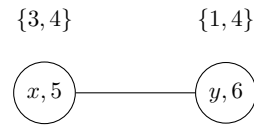


Figura 3.15: Opción 2, borde final caso 2

Los cuales, por la Afirmación 4, también tienen la factibilidad de que al momento de reintegrar el vértice v en el grafo, se puede extender la coloración c de G' a G .

Caso 3: Para este caso, se considera que una de las triangulaciones utiliza 6 colores en su borde, y la otra utiliza a lo más 5 colores en su borde. Suponiendo que la de la izquierda utiliza 6 colores, mientras que la otra utiliza 5 colores en su borde. Ver Figura 3.16. El caso contrario funciona de manera similar.

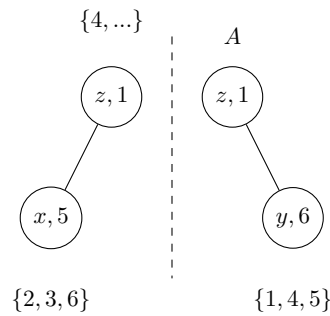


Figura 3.16: Estructura 1 caso 3. El conjunto A no contiene el 2, y podría o no contener el 3. La diferencia simétrica entre $\{4, \dots\}$ y A es al menos 2.

Dada la definición presentada para el caso, que hace referencia a la estructura presentada en la Figura 3.16, se sabe que hay un color que no aparece en el borde correspondiente al lado derecho, sin pérdida de generalidad dígame que el color 2 es el que no está presente en el borde mencionado, así se permuta a la izquierda el color 2 por 4, lo que no genera ningún problema en las condiciones para que se aplique bien la operación 3, resultando el borde de G' presentado en la Figura 3.17.

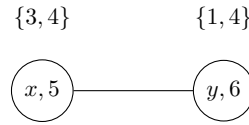


Figura 3.17: Borde final caso 3.

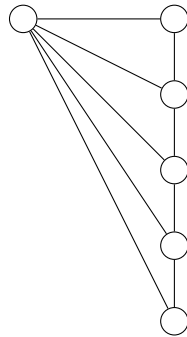
Por lo cual se puede extender la coloración c presente en el grafo G' al grafo G por lo expuesto en Afirmación 4.

Se puede concluir que la coloración c presentada en G' siempre es extensible a G , bajo las condiciones y permutaciones correspondientes.

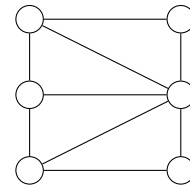
□

3.4. Estudio en grafos outerplanares maximales sin triángulos interiores

Considerando el Teorema 3 se sabe que todo grafo outerplanar maximal, se puede construir recursivamente usando operación 1, operación 2 y operación 3. Si se toma en cuenta solo la operación 1 y operación 2, se generan todos los grafos outerplanares maximales sin caras interiores, y se puede separar en dos tipos de estructuras, dado a la manera que se pueden o no combinar las operaciones. Si se considera solo operaciones 1 (respectivamente operaciones 2), se denominará caracol, (ver Figura 3.18a), por otro lado si se hace una combinación de ambas operaciones, se obtienen cadenas (ver Figura 3.18b)



(a) Caracol, estructura generada por operación 2



(b) Cadenas, estructura generada por combinación de operaciones 1 y operaciones 2.

Figura 3.18: Representación de caracoles y cadenas.

En la Figura 3.18a se procede continuamente con la misma operación, es decir, primero se tiene un borde inicial, al cual se le aplica en el caso del ejemplo una operación 2, el triángulo formado al agregar un nuevo vértice, genera un nuevo borde, aquí se vuelve a aplicar una operación dos y así se procede sucesivamente hasta obtener el grafo G representado. Por otro lado para las cadenas se hace una combinación de las operaciones 1 y 2. Se comienza con el borde inicial al cual se le aplica operación 2, luego, al borde generado por el triángulo recientemente formado, se le aplica operación 1, a este borde nuevamente se le aplica operación 1 y al borde obtenido de este se le aplica operación 2, obteniendo así el grafo G representado para las cadenas. Cabe considerar que las cadenas pueden presentar caracoles en su interior.

Estas estructuras se pueden colorear en algunos casos con 4 colores, pero se presentan otras que requieren de 5, específicamente para cuando el largo del caracol, es de $(3 \cdot 2n)$ o $(3 \cdot 2n) \pm 1$. Para estos grafos el largo del caracol corresponde al grado máximo del grafo. Además, también es posible probar

que los números cromáticos impar casi fuerte y 2-impar en la familia de grafos outerplanares maximales sin triángulos internos es a lo más 5.

Proposición 3.2. *Para todo G outerplanar maximal sin triángulos internos, se tiene que $\chi_{qso}(G) = \chi_o^2(G) \leq 5$. La cota es justa.*

Demostración. Se busca probar que para la clase de grafos outerplanares maximales, la cota de su número cromático es a lo más 5, y además esta es justa, lo cual será mostrado en la Subsección 3.4.1. Para la demostración se va a utilizar la construcción recursiva de los grafos outerplanares maximales.

La idea principal de la demostración es la siguiente: se procede por inducción en la cantidad de vértices del grafo, se inicia el procedimiento recursivo con un triángulo y un borde en donde se consideran los colores de los vértices del borde y los conjuntos de testigos respectivos para una 5-coloración 2-impar. Se prueba que al aplicar las operaciones 1 y 2 es posible extender la 5-coloración 2-impar y que es posible obtener los mismos bordes bajo permutación de los colores.

Se presenta el caso base con $n = 3$, para posteriormente aplicar operación 1 a este caso y especificar, la manera en la se trabajará. En la Figura 3.19, se contemplará la coloración, de la manera adecuada para un grafo en 3 vértices.

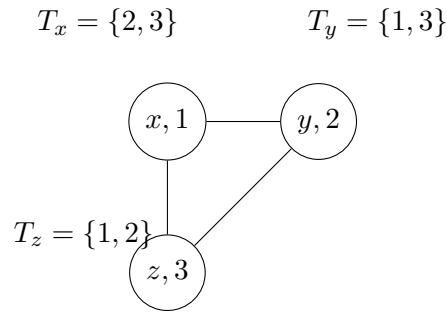


Figura 3.19: Caracol G con $n = 3$, caso base de la inducción.

Se puede apreciar que el caso base está bien coloreado con 3 colores, dado que cada uno tiene un color diferente y dos vecinos adyacentes coloreados con diferentes colores, lo que permite la ocurrencia de al menos dos colores una cantidad impar de veces, que es la necesaria.

Se observa que en el grafo hay un borde $[G] = (w, y)$ el cual tiene una estructura única bajo permutación, como se puede apreciar en la Figura 3.19, el borde del grafo G , el cual es denotado como β_0 es simétrico. Se llamará espejo, al borde que posee una reflexión respecto a la vertical, lo que significa, que no se obtendrá el mismo borde, pero si el reflejo de este.

Se comienza aplicando operación 1, al borde β obtenido desde el triángulo del caso base, Se muestra un ejemplo para $n = 4$, con el fin de obtener el borde β_0 , al cual también se le llamará borde inicial. (Ver Figura 3.20)

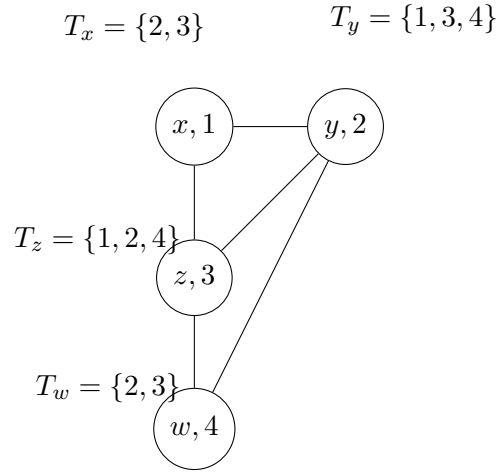


Figura 3.20: Caracol G con $n = 4$ generado a partir de un triángulo, aplicando 1 vez la Operación 1.

Esto entrega el siguiente borde, el cual se denota como β_0

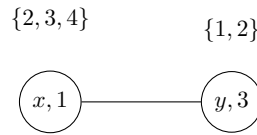


Figura 3.21: Borde final del caso base, el cual será borde inicial β_0 .

A partir del borde presentado en Figura 3.21 al comenzar cualquier operación desde este, se puede colorear con 5 colores, al utilizar la técnica correcta de coloreo. Para esto se debe tener en cuenta que el borde presenta una estructura móvil, es decir no se mantendrá a medida que se le agregan vértices, pero siempre se obtiene un borde que ya se conoce como trabajar. El borde 1 presentado en la Figura 3.21 crea dos bordes al aplicarle operación 1 u operación 2, pero solo uno de estos bordes es nuevos, en la Figura 3.22 se presentan los bordes obtenidos :

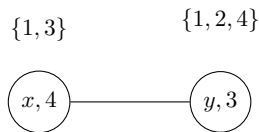


Figura 3.22: Primer borde final, obtenido de comenzar con borde β_0 y aplicar operación 1, al ser borde inicial se denotará como borde β_1 .

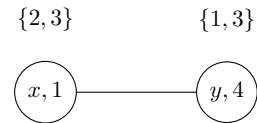


Figura 3.23: Borde final obtenido de comenzar con borde β_0 y aplicar operación 2, al ser borde inicial es denotado por β_2 .

Figura 3.24: Obtención de los bordes finales, luego de aplicar operación 1 y 2 al borde inicial β_0

Se puede verificar que el borde β_1 bajo permutación es el mismo borde espejo de β_0 , como este caso ya está revisado, se procede a trabajar solo con β_2

Desde acá se puede ver que los conjuntos de testigos de borde β_2 presentado en la Figura 3.23 tienen tamaño 2 y además tienen un elemento en común.

Si se considera β_2 como borde inicial, este genera un nuevo borde similar al borde β_0 pero ahora aparecen los 5 colores en el total de los conjuntos testigos. Como se ve en la siguiente Figura 3.25 y además genera un borde ya conocido, dependiendo de la operación que se obtenga. Al borde β_2 aplicar operación 1, se vuelve a obtener el borde β_0 bajo permutación, por otro lado si se le aplica operación 2, se obtiene el borde presentado en la Figura 3.25

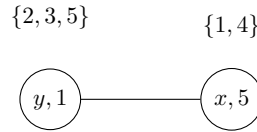


Figura 3.25: Borde final obtenido, de comenzar con β_2 , al ser considerado borde inicial es denotado como β_3 .

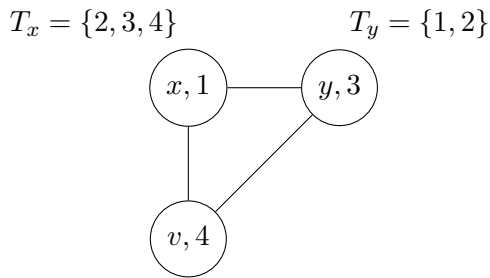
Si se considera este borde como inicial, al aplicar operación 1, bajo permutación se obtiene el borde β_0 , por otro lado se se aplica operación 2, bajo permutación se obtiene el borde β_2 . Lo cual indica que no hay más bordes posibles que los mencionados.

Por lo tanto para el paso inductivo se supondrá hay un grafo G' el cual tiene la estructura de caracol en t vértices, el cual tiene una 5-coloración 2-impar denotada por c y además termina en alguno de los bordes presentado anteriormente bajo permutación.

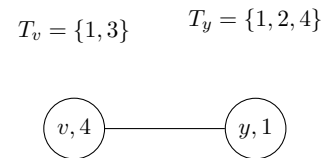
Se va a probar que c se puede extender al grafo $G = G' + v$, donde v es un vértice agregado con la misma operación que se genera el caracol, es decir, es agregado correctamente con operación 1 u operación 2 según lo que indique el caracol.

Para lo cual se va a estudiar los 4 casos de borde, con solo una de las operaciones, dado que los bordes son siempre los mismos bajo permutación y además en espejo para cuando se decide hacer la operación alterna. Esto indicará como extender la coloración al grafo G cuando se agrega el vértice v de manera correcta.

Caso borde β_0 : Considerando que se inicia con el borde β_0 , al agregar un vértice con operación 1, se sabe que este no puede tomar el color de sus vecinos, es decir, color 1 o 3 y además debido a que hay un conjunto de testigos que posee solo dos elementos $T_y = \{1, 2\}$, tampoco se pueden utilizar los colores que aparecen aquí, por lo tanto también se prohibió el uso del color 2, de esta manera quedan disponibles los colores 4 y 5. Sin pérdida de generalidad se coloreará con 4 para poder dar la representación gráfica y el borde final del grafo G en donde se extendió la coloración c



(a) Estructura inicial al agregar v

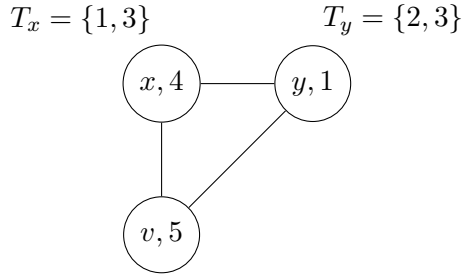


(b) borde final al agregar v

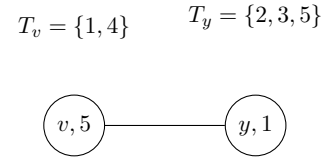
Figura 3.26: Extensión de coloración c para el borde β_0 , obtención de borde β_1

Caso borde β_2 :

Al comenzar con el borde β_2 , se debe considerar que solo hay 4 colores en el borde, pero además que $|T_x| = |T_y| = 2$, por lo tanto no se podrán utilizar los colores de los testigos para colorear v , debido que si no se perderá su propiedad de coloración 2-impar, por lo tanto como v no puede ser coloreado con color 1 ni 4, además los colores 2 y 3 se encuentran en los testigos, v debe ser coloreado con 5.



(a) Estructura inicial al agregar v

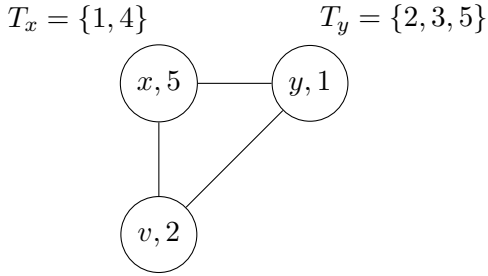


(b) borde final al agregar v , denotado β_3

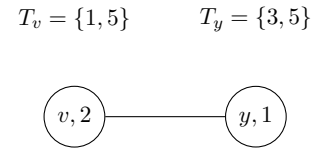
Figura 3.27: Extensión de coloración c para el borde β_2 , obtención de borde β_3

Caso borde β_3 : Finalmente se considera el caso en el que el borde inicial es β_3 , dado que este como se verá luego en la Figura 3.28 bajo permutación vuelve a ser el borde β_1 .

Al agregar el vértice v al grafo, este no puede ser coloreado con colores 1 y 5, debido a que debe ser coloración propia, además se prohíbe el color 4, debido a que $|T_x| = 2$ donde el color 4 es uno de sus elementos, por otro lado $|T_y| = 3$ por lo tanto se puede prescindir de uno de sus elementos, es por esto que los colores disponibles para colorear v son los colores 2 y 3. Sin pérdida de generalidad, se colorea con 2, la coloración extendida al grafo G , junto con el borde obtenido.



(a) Estructura inicial al agregar v



(b) borde final al agregar v , denotado β_3

Figura 3.28: Extensión de coloración c para el borde β_2 , obtención de borde β_3

Como se puede apreciar en la Figura 3.28 a pesar de haber comenzado con un borde β_2 , se llega luego de agregar un vértice, al borde β_1 bajo permutación, lo que indica que con la construcción recursiva del grafo y las permutaciones adecuadas, la coloración c siempre se puede extender a un vértice más, debido a que el borde final, siempre se encontrará dentro del conjunto de bordes iniciales. $\square$

3.4.1. Ejemplo cota justa

Para presentar que la cota es justa, se presenta el siguiente grafo G el cual no puede ser coloreado con menos de 5 colores, este será visto en la Figura 3.29

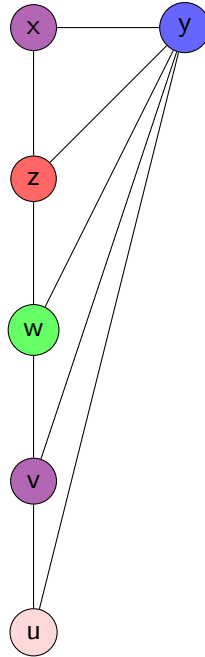


Figura 3.29: Caracol G con largo 5, el cual muestra la cota justa, mencionada en Proposición 3.2.

Dada la estructura del caracol, se colorea el triángulo xyz con tres colores distintos como fue mencionado anteriormente, debido a que debe ser una coloración propia. Luego al vértice w se le colorea con *verde* dado que debe tener un color distinto a los anteriores, para mantener las propiedades de ser una coloración 2-impar. Para el vértice v se puede volver a repetir el color *violeta*, dado que ningún vértice pierde las propiedades de la coloración, particularmente el vértice y sigue manteniendo que existen 2 colores con ocurrencia impar en su vecindario. Finalmente al vértice u no se le puede entregar color *verde* ni *rojo*, debido a que de ser coloreado con uno de estos colores, y ya no cumpliría con las propiedades de la coloración, por lo tanto es necesario un quinto color, que en este caso es *rosado*.

Capítulo 4

Exploración en grafos outerplanares y 3-árboles planares

4.1. Exploración en grafos outerplanares

En esta sección se probará por inducción que todo grafo outerplanar G es coloreable bajo la coloración 2-impar con a lo más 7 colores. Como consecuencia directa de este resultado, se obtiene que el número cromático asociado a la coloración impar casi fuerte también está acotado superiormente por 7. Este hecho se justifica mediante la Proposición 1.6, la cual establece que toda coloración casi impar puede ser inducida a partir de una coloración 2-impar, por lo que cualquier cota superior válida para esta última se preserva en la primera.

Adicionalmente, se explicará por qué el uso de 8 colores resulta una cota inmediata en el contexto de estas coloraciones cuando se consideran grafos outerplanares.

A partir del resultado de Goetze, et. al [6], se sabe que $\chi_{so}(G) \leq 8$, por lo tanto por la Proposición 1.6, se tiene que $\chi_{qso}(G) \leq 8$. Más aún, a partir de la demostración de $\chi_{so}(G) \leq 8$, se puede probar que la 8-coloración impar fuerte que construyen en el artículo para $\chi_{so}(G) \leq 8$, es también, una coloración 2-impar. El siguiente resultado en grafos outerplanares no es difícil de probar.

Teorema 5. Si G es un grafo outerplanar, entonces $\chi_o^2(G) \leq 7$ y $\chi_{qso}(G) \leq 7$.

Demostración. Para esta prueba se utilizará un argumento similar al del Teorema 4, para cuando se presenta el *peor* caso de estudio, que es específicamente cuando están los vértices x, y , además $|T_x| = |T_y| = 2$ y adicionalmente se tiene $c(x) \notin T_y$ y $c(y) \notin T_x$. Para todos los otros casos, se puede probar que hay formas simples de extender la coloración c , al momento de añadir el nuevo vértice v .

Se va a probar la cota es cierta para $\chi_o^2(G)$ dado que para la coloración impar casi fuerte se tiene de manera análoga, dado el motivo que se presenta en la Proposición 1.6. Esto se hará considerando G un contraejemplo minimal al teorema.

Se sabe que para todo grafo outerplanar, hay un vértice de grado 2. Por lo tanto se considera $v \in V(G)$ vértice de grado 2 en G . Sean $x, y \in V(G)$ los vecinos de v en G . Considerando el grafo G' obtenido a partir de G borrando el vértice v , y añadiendo la arista xy en caso de que no exista en G . El grafo G' es outerplanar pues G lo es.

Además $|G'| < |G|$ y por la minimalidad de G se tiene que $\chi_o^2(G') \leq 7$. Entonces, existe $c : V(G') \rightarrow [7]$ una 7-coloración 2-impar de G' .

Caso 1: Se probará a continuación que es posible extender c a una 7-coloración 2-impar de G : Como $xy \in E(G')$, entonces se puede suponer sin pérdida de generalidad que $c(x) = 1$ y $c(y) = 2$.

Asumiendo inicialmente que existe la arista xy en el grafo G , se considera por definición: $|T_x| \geq 2$ y $|T_y| \geq 2$, si $|T_x \setminus \{2\}| \geq 2$ y $|T_y \setminus \{1\}| \geq 2$ entonces se puede extender c a una 7-coloración 2-impar de G , coloreando v con el séptimo color disponible. Un ejemplo explicativo se presenta en la Figura 4.1, donde se supondrá que la arista $xy \in E(G)$, se asumen los colores $c(x) = 1$, $c(y) = 2$ como se mencionó en un principio. Se dice que los testigos de x están presentados por $T_x = \{3, 4\}$ y los de y por $T_y = \{5, 6\}$

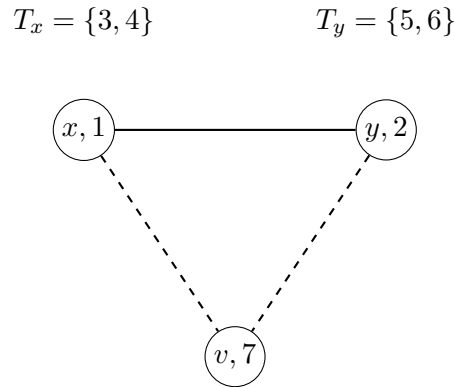


Figura 4.1: v es colorado con 7. Así los vértices x, y tienen testigos $\{3, 4, 7\}$ y $\{5, 6, 7\}$ respectivamente. Los testigos de v son $\{1, 2\}$

Caso 2: Asumiendo que la arista $xy \notin E(G)$, existen dos posibilidades que se deben abarcar.

- a cuando $x \notin T_y$, $y \notin T_x$ y además $T_x \neq T_y$, lo cual se soluciona como el Caso 1, coloreando con un séptimo color el vértice v .
- b cuando la arista no existe en G , pero en G' , $x \in T_y$ y/o $y \in T_x$, si esto sucediera, al extender el grafo a G , se elimina la arista, provocando que T_x y/o T_y pierdan a lo más uno de sus testigos cada uno, como además se asume que $|T_x| = |T_y| = 2$, al eliminar un testigo, la coloración pierde las propiedades de 2-impar, pero como además se agrega un vértice v el cual ahora está coloreado, sin pérdida de generalidad se sigue manteniendo el color 7, (aunque la coloración ahora utiliza menos de 7 colores), este vértice v , ahora es testigo de x, y , por lo tanto se puede generar la extensión de c a G .

En la Figura 4.2 se presenta el antes y el después de eliminar la arista, donde se supondrá en un comienzo que la arista $xy \in E(G)$, para posteriormente ser removida. se asumen los colores $c(x) = 1$, $c(y) = 2$ como se mencionó en un principio. Se dice que los testigos de x están presentados por $T_x = \{2, 3\}$ y los de y por $T_y = \{1, 4\}$

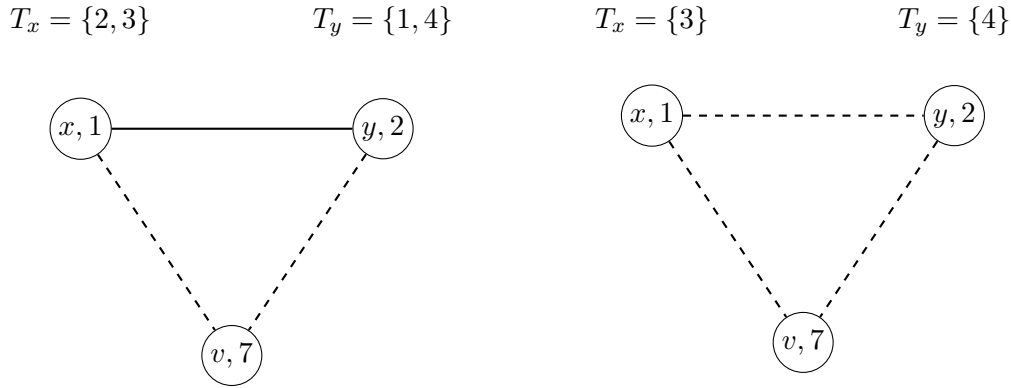


Figura 4.2: Así v es colorado con 7. Para los vértices x, y se tienen los nuevos testigos $\{3, 7\}$ y $\{4, 7\}$ respectivamente. Los testigos de v son $\{1, 2\}$

□

4.2. Exploración en triangulaciones stacks

En esta sección se estudiará una clase particular de grafos planares, conocidos como triangulaciones stack o 3-árboles planares. El análisis comenzará con la descripción del proceso de construcción recursiva del grafo.

A partir de dicha construcción, se mostrará que resulta inmediato obtener una cota superior de 10 colores para el número cromático bajo la coloración 2-impar. En consecuencia de la Proposición 1.6, esta misma cota se transfiere de manera directa a la coloración impar casi fuerte.

4.2.1. Construcción del grafo

En esta sección se describe la construcción del grafo perteneciente a la clase triangulación stack, fijando la notación y las propiedades estructurales que serán utilizadas en los resultados posteriores. Lo cual es recopilado del artículo de Jiménez & Kiwi (2018) [22]. En particular, el procedimiento constructivo permite identificar de manera explícita las relaciones entre vértices, aristas y caras, las cuales resultan fundamentales para el análisis de las coloraciones estudiadas.

La definición de la clase, es recursiva, específicamente, sea Δ_0 un triángulo. Para $i \geq 1$, sea Δ_i la triangulación plana obtenida después de aplicar la siguiente regla de crecimiento a Δ_{i-1} .

Regla de crecimiento Dada una triangulación plana Δ ,

- **Paso 1:** Escoger una cara interior f de Δ .
- **Paso 2:** Insertar un nuevo vértice v al interior de f .
- **Paso 3:** Conectar el nuevo vértice v a cada vértice del contorno de f .

En la Figura 4.3 se presenta el paso a paso de la regla de crecimiento, para la construcción del grafo.

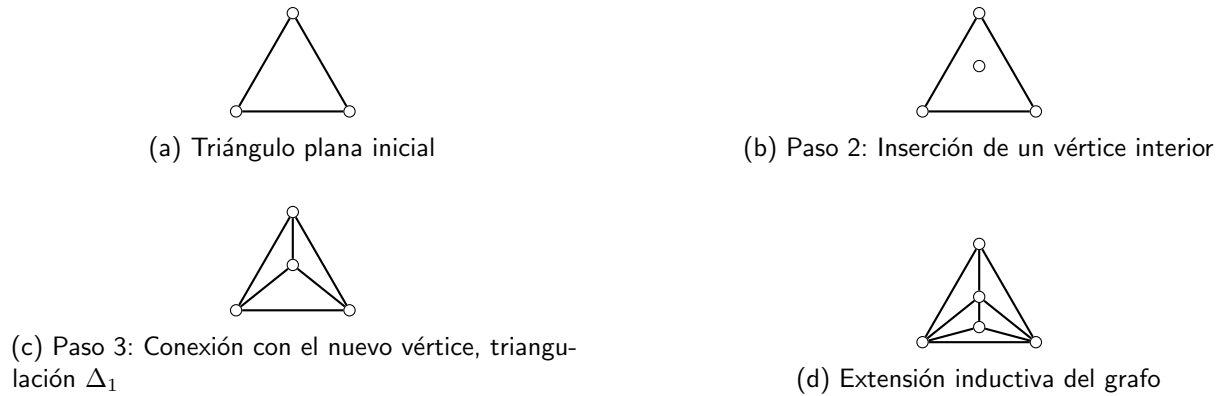


Figura 4.3: Construcción incremental de una triangulación stack (3-árbol planar).

En la Figura 4.3 se presenta inicialmente la triangulación, como hay una única cara interna se escoge esta para agregar el vértice, luego se hace la unión del vértice v con los de la cara escogida, ahora esta triangulación Δ_1 posee 3 caras internas, para las cuales se vuelve a escoger una para agregar un vértice u' el cual se une a los vértices correspondientes a su cara.

4.2.2. Evidencia de que 10 colores son suficientes

Se busca demostrar el siguiente Teorema 6 para la coloración 2-impar, para la clase de triangulación stack.

Teorema 6. Sea G una triangulación stack, entonces $\chi_o^2(G) \leq 10$, lo cual implica que $\chi_{qso}(G) \leq 10$.

Demostración. La demostración procederá por inducción en la cantidad de vértices del grafo G . Dado que el coloreo se genera recursivamente a medida que se genera el grafo.

Presentando primero el caso base, para $n = 4$.

Es decir, inicialmente G comienza con un triángulo el cual se denota como Δ_0 , el cual debe tener cada uno de sus vértices, $\{x, y, z\}$ coloreados con distintos colores, sin pérdida de generalidad dígame $\{\text{morado, azul y verde}\}$, simplemente para mantener el hecho de que sea una coloración propia, lo que a su vez cumple con ser una coloración impar casi fuerte, la cual para los triángulos coincide con ser una coloración 2 impar. Luego, se agrega un vértice v en la cara interna del triángulo Δ_0 , al realizar el siguiente paso de la regla de crecimiento, el vértice v es adyacente a los tres vértices iniciales que formaban el triángulo Δ_0 . Como principalmente la coloración debe cumplir con ser una coloración propia, v debe ser coloreado con un cuarto color, es decir, con un color diferente a los tres ya utilizados, sin pérdida de generalidad color rosado. Así se tiene que para el caso base $n = 4$, el grafo debe utilizar 4 colores diferentes, este proceso se indica en la Figura 4.4.

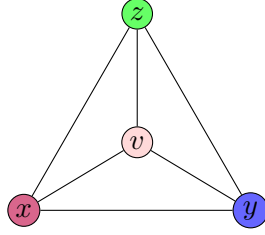


Figura 4.4: Caso base de G , para $n = 4$

Ahora, se asume que la coloración se cumple para G' en t vértices con a lo más 10 colores, por lo cual se procede a demostrar que 10 colores también serán suficientes para G en $t + 1$ vértices.

Sea v el último vértice en ser agregado en una de las caras internas de G , se sabe que $G' = G - v$ presenta una coloración impar con a lo más 10 colores, dígase que v es adyacente a x, y, z cada uno de estos vértices está coloreado con un color distinto, debido a que pertenecen a un triángulo. Se presenta esta estructura inicial en la Figura 4.5

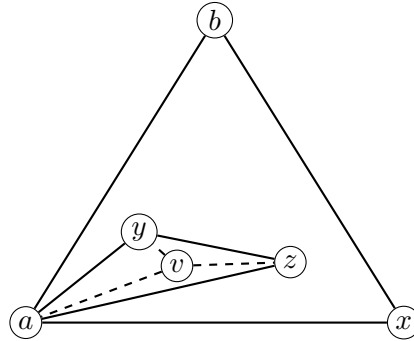


Figura 4.5: Paso inductivo para demostración de triangulación stack.

Se tiene que cada vértice tiene su propio conjunto de testigos, el peor caso posible es cuando el conjunto de testigos de los vértices x, y, z , es decir, T_x, T_y, T_z poseen cada uno dos elementos y todos diferentes entre ellos y además $x \notin T_y, T_z$ y $y \notin T_x, T_z$ y $z \notin T_x, T_y$ lo que indica que los elementos que testifican a los vértices x, y, z son 6 colores distintos a los 3 correspondientes a cada vértice respectivamente, por lo tanto $|x, y, z, T_x, T_y, T_z| = 9$ lo cual deja un décimo color disponible para extender correctamente la coloración c en G , al poder colorear v con el color, dígase sin pérdida de generalidad 10.

□

Bibliografía

- [1] Igor Fabrici, Borut Luzar, Simona Rindošová y Roman Soták. "Proper conflict-free and unique-maximum colorings of planar graphs with respect to neighborhoods". En: *Discrete Applied Mathematics* 324 (2023), págs. 80-92. ISSN: 0166-218X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dam.2022.09.011>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X22003584>.
- [2] Mirko Petruševski y Riste Škrekovski. "Colorings with neighborhood parity condition". En: *Discrete Applied Mathematics* 321 (2022), págs. 385-391. ISSN: 0166-218X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dam.2022.07.018>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X22002803>.
- [3] Hyemin Kwon y Boram Park. "Strong odd coloring of sparse graphs". En: *arXiv preprint arXiv:2401.11653* (2024). ISSN: 2331-8422. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2401.11653>. arXiv: 2401.11653 [math.CO]. URL: <https://arxiv.org/abs/2401.11653>.
- [4] Jan Petr y Jean Portier. "The Odd Chromatic Number of a Planar Graph is at Most 8". En: *Graphs and Combinatorics* 39.28 (2023). DOI: [10.1007/s00373-023-02617-z](https://doi.org/10.1007/s00373-023-02617-z). URL: <https://doi.org/10.1007/s00373-023-02617-z>.
- [5] Yair Caro, Mirko Petruševski, Riste Škrekovski y Zsolt Tuza. "On strong odd colorings of graphs". En: *Discrete Mathematics* 348.11 (2025), pág. 114601. ISSN: 0012-365X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2025.114601>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X25002092>.
- [6] Miriam Goetze, Fabian Klute, Kolja Knauer, Irene Parada, Juan Pablo Peña y Torsten Ueckerdt. "Strong odd coloring in minor-closed classes". En: *arXiv preprint arXiv:2505.02736* (2025). DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.02736>. arXiv: 2505.02736 [math.CO]. URL: <https://arxiv.org/abs/2505.02736>.
- [7] Tao Dai, Qi Ouyang y Felix Piro. "New Bounds for Odd Colourings of Graphs". En: *The Electronic Journal of Combinatorics* 31.4 (2024), P4.57. DOI: [10.37236/12110](https://doi.org/10.37236/12110). URL: <https://doi.org/10.37236/12110>.
- [8] Kenneth Appel y Wolfgang Haken. "Every planar map is four colorable". En: *Illinois Journal of Mathematics* 21.3 (1976), págs. 429-567.
- [9] Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas. "The Four-Colour Theorem". En: *Journal of Combinatorial Theory, Series B* 70.1 (1997), págs. 2-44. ISSN: 0095-8956. DOI: <https://doi.org/10.1006/jctb.1997.1750>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895697917500>.

- [10] Guy Even, Zvi Lotker, Dana Ron y Shakhar Smorodinsky. "Conflict-free colorings of simple geometric regions with applications to frequency assignment in cellular networks". En: *SIAM Journal on Computing* 33.1 (2003), págs. 94-136. DOI: [10.1137/S0097539702419760](https://doi.org/10.1137/S0097539702419760). URL: https://www.researchgate.net/publication/220722265_Conflict-free_Colorings_of_Simple_Geometric_Regions_with_Applications_to_Frequency_Assignment_in_Cellular_Networks.
- [11] Shakhar Smorodinsky. "Conflict-Free Coloring and its Applications". En: *Geometry - Intuitive, Discrete, and Convex*. Ed. por Imre Bárány, K. J. Böröczky, G. F. Tóth y János Pach. Vol. 24. Bolyai Society Mathematical Studies. Springer, Berlin, Heidelberg, 2013, págs. 331-389. ISBN: 978-3-642-41497-8, 978-3-642-41498-5. DOI: [10.1007/978-3-642-41498-5_12](https://doi.org/10.1007/978-3-642-41498-5_12).
- [12] Yair Caro, Mirko Petruševski y Riste Škrekovski. "Remarks on odd colorings of graphs". En: *Discrete Applied Mathematics* 321 (2022), págs. 392-401. ISSN: 0166-218X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dam.2022.07.024>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X22002864>.
- [13] Zhengke Miao, Lin Sun, Zhuojie Tu y Xiaowei Yu. "On odd colorings of planar graphs". En: *Discrete Mathematics* 347.1 (2024), pág. 113706. ISSN: 0012-365X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2023.113706>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X23003928>.
- [14] Yunlong Wang, Weifan Wang y Runrun Liu. "Proper conflict-free 6-coloring of planar graphs without short cycles". En: *Applied Mathematics and Computation* 499 (2025), pág. 129405. ISSN: 0096-3003. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2025.129405>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300325001328>.
- [15] Eun-Kyung Cho, Ilkyoo Choi, Hyemin Kwon y Boram Park. "Odd coloring of sparse graphs and planar graphs". En: *Discrete Mathematics* 346.5 (2023), pág. 113305. ISSN: 0012-365X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2022.113305>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X22005118>.
- [16] Masaki Kashima y Xuding Zhu. "Odd 4coloring of outerplanar graphs". En: arXiv preprint arXiv:2407.19362 (2024). DOI: [10.48550/arXiv.2407.19362](https://doi.org/10.48550/arXiv.2407.19362). arXiv: [2407.19362 \[math.CO\]](https://arxiv.org/abs/2407.19362). URL: <https://arxiv.org/abs/2407.19362>.
- [17] Masaki Kashima, Shun-ichi Maezawa, Kakeru Osako, Kenta Ozeki y Shoichi Tsuchiya. "An odd 4-coloring of a maximal outerplanar graph". En: *Discrete Mathematics* 348.10 (2025), pág. 114556. ISSN: 0012-365X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2025.114556>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X25001645>.
- [18] G. Wegner. *Graphs with given diameter and a coloring problem*. Inf. téc. University of Dortmund, 1977.
- [19] Don R. Lick y Arthur T. White. " k -degenerate graphs". En: *Canadian Journal of Mathematics* 22.5 (1970), págs. 1082-1096. DOI: [10.4153/CJM-1970-125-1](https://doi.org/10.4153/CJM-1970-125-1).
- [20] R. C. Laskar, H. M. Mulder y B. Novick. "Maximal outerplanar graphs as chordal graphs, path-neighborhood graphs, and triangle graphs". En: *Australasian Journal of Combinatorics* 52 (2012). Accedido el 29 de abril de 2026, págs. 185-195. URL: https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/52/ajc_v52_p185.pdf.
- [21] Andrea Jiménez, Marcos Kiwi y Martin Loebl. "Satisfying states of triangulations of a convex n -gon". En: *The Electronic Journal of Combinatorics* 17.1 (2010), R39. DOI: [10.37236/311](https://doi.org/10.37236/311). URL: <https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/v17i1r39>.

- [22] Andrea Jiménez y Marcos Kiwi. "Antiferromagnetic Ising model in triangulations with applications to counting perfect matchings". En: Discrete Applied Mathematics 172 (2014), págs. 45-61. ISSN: 0166-218X. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.dam.2014.02.016>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X14001036>.