



INMERSIONES EN GRAFOS CON NÚMERO DE INDEPENDENCIA DOS

**Trabajo de Título para optar al título profesional de
Ingeniero Civil Matemático**

Antonia Belén Bermúdez Bustos

Profesor Guía

Daniel Quiroz Brito
Universidad de Valparaíso

Miembros de la comisión:

Andrea Jiménez
Universidad de Valparaíso
Nicolás Rivera
Universidad de Valparaíso

Con financiamiento parcial del proyecto FONDECYT Regular 1252197

INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
VALPARAÍSO, FECHA.

Resumen

Para la teoría de grafos, uno de los mayores problemas consiste en entender la relación entre la estructura de un grafo y su número cromático. El buscar establecer esta relación ha dado origen a una gran cantidad de conjeturas y resultados relacionados a la coloración de grafos. Siendo uno de los resultados más importantes el Teorema de los Cuatro Colores, el cual establece que todo grafo planar puede ser coloreado con a lo más cuatro colores. Como veremos, este teorema derivó en el desarrollo de una gran variedad de problemas relacionados sobre la existencia de determinadas subestructuras en grafos con número cromático alto.

El número de clique de un grafo G , denotado por $\omega(G)$, corresponde al tamaño del mayor subgrafo completo en un grafo G . Dado que un grafo completo de n vértices, su número cromático $\chi(G) = n$, entonces, para cualquier grafo G , se tiene que $\omega(G) \leq \chi(G)$, ya que un grafo completo debe recibir colores distintos en cada vértice, pero la desigualdad contraria no es cierta. En este sentido, el Teorema de Mycielski nos dice que hay grafos sin un completo en 3 vértices y número cromático arbitrariamente alto. Esto deja como consecuencia que un número cromático elevado no garantiza que el grafo tenga una subestructura completa como subgrafo. No obstante, se esperaría que un grafo con número cromático alto contenga una subestructura completa en un sentido más débil. Lo que ha llevado al estudio de diversas formas de contención de grafos, como las subdivisiones, menores e inmersiones.

Una de las conjeturas más importantes, que relaciona el número cromático y la contención de subestructuras completas es la Conjetura de Hadwiger, la cual dice que todo grafo G con número cromático $\chi(G)$ contiene a $K_{\chi(G)}$ como menor. Aunque esta afirmación sigue abierta, la conjetura a llevado a la elaboración de varias variantes donde se reemplaza la noción de menor por otras formas de contención.

En el presente trabajo se abordarán conjeturas análogas a la Conjetura de Hadwiger para inmersiones completas. En particular, se estudiará la Conjetura de Lescure y Meyniel (1989), la que establece que todo grafo G contiene una inmersión de un grafo completo $K_{\chi(G)}$. Esto da paso a la Conjetura de Vergara (2017), que propone que todo grafo G con n vértices y número de independencia ~ 2 contiene una inmersión de $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Nuestro primer resultado restringe la familia de grafos que pueden formar un contraejemplo mínimo a la Conjetura de Vergara. Así se demuestra que todo contraejemplo mínimo a la Conjetura de Vergara debe contener como subgrafo inducido al ciclo C_5 añadiendo un vértice externo adyacente a exactamente tres vértices del ciclo. Luego, se demuestra que todo grafo con número de independencia dos contiene a $K_{\chi(G)}$ como menor o como inmersión. Finalmente, se verifica la Conjetura de Vergara para todo grafo con a lo más diez vértices, es decir, se demuestra que si G tiene $n \leq 10$ vértices y número de independencia 2, entonces G contiene una inmersión de $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Agradecimientos

Quiero agradecer a todas las personas que formaron parte de este largo proceso. Comenzando por mi familia, que siempre me apoyaron, ya sea con palabras de ánimo, comprensión y cariño. A mi padre Carlos por darme su apoyo incondicional y motivarme a nunca rendirme, gracias por aguantar los cambios de humor, los momentos de estrés y por ayudarme a afrontar todos los altibajos que tuve durante la carrera. A mi hermana Xiomara, la que es mi gemela, que me contuvo no sólo durante la carrera, sino durante toda mi vida, gracias por todas las conversaciones, los ánimos y nunca dejarme sola, se que estarás orgullosa de mí así como yo lo estoy de ti. A mi hermanito Carlo, que con su enorme cariño alegra mis días, que siempre está dispuesto a ayudarme en lo que sea, quien siempre tiene una sonrisa, unas palabras bonitas o un chiste para hacerme sonreír. A mi abuela Juana, que ha hecho el papel de madre, quien me ha acompañado durante todo este proceso, sin dejar que nada me falte, a pesar de la distancia, se que siempre puedo contar con ella. A mi tía Patricia, quien también ha sido como una madre para mí, que me ha acompañado durante toda mi carrera a solo una casa de distancia, siempre ofreciéndome ayuda y nunca dejándome sola. Quiero agradecer también a mi pareja Alexander, quien me ha dado todo su apoyo incondicional, y que cuando en varias ocasiones sentía que no lo iba a lograr, sus palabras acertadas y su gran amor me calmaron y me ayudaron a seguir adelante. A mis perritos Jack y Tyson, mis fieles compañeros, que me acompañaron en cada noche de desvelo, que con su cálida bienvenida cada vez que llegaba de estudiar podía calmarme. Además, agradecer a Jordán, que si bien la vida no te permitió verme llegar hasta acá, se que puedes verme desde algún lado orgulloso, viendo lo lejos que he llegado, que sepas que nunca olvidaré el apoyo y el amor que me diste, tu fuiste el que me dió fuerzas para seguir adelante. Muchas gracias a cada uno de los miembros de mi familia, incluyendo a aquellos seres que no son mi familiares de sangre, pero que forman parte de lo que yo considero mi familia.

Quiero agradecer a mis profesores de la universidad, que me ofrecieron tiempo y mucha paciencia para resolver cada una de mis dudas. En especial a Daniel Quiroz, que me ayudó y me guió en esta parte tan importante de mi carrera, y que con su infinita paciencia y largas horas de estudio, logré finalizar esta etapa tan importante.

Gracias a cada uno de mis compañeros de carrera que me ayudaron, ya sea con material de estudio o con una buena charla, atesoraré cada buen momento compartido con ustedes.

Muchas gracias al Instituto de Ingeniería Matemática, por brindarme material de estudio y un lugar adecuado para estudiar.

Gracias a todos por estar en mi vida y acompañarme en este proceso.

Índice general

Resumen	2
Algunas Palabras	3
1. Introducción	5
1.1. Número cromático y subestructuras completas	5
1.2. Introducción a la Conjetura de Hadwiger	6
1.3. Inmersiones completas y número cromático	6
1.4. Resultados de esta memoria	8
2. Contraejemplos mínimos a la Conjetura de Vergara	10
2.1. Subgrafos inducidos en contraejemplos mínimos	10
3. Menores o inmersiones para grafos con número de independencia dos	13
3.1. Resultados clave	13
3.2. Hallar inmersiones a través del grado mínimo	14
4. Inmersiones en grafos pequeños con número de independencia dos	16
4.1. Introducción a los números de Ramsey	16
4.2. Obtención de inmersiones de $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ en grafos pequeños	16
4.3. Complicaciones para grafos más grandes	21
5. Glosario de términos	25

Capítulo 1

Introducción

Asumimos familiaridad con terminología básica de teoría de grafos, que puede ser revisada en el glosario de esta memoria.

Para la teoría de grafos, uno de los mayores problemas consiste en entender la relación entre la estructura de un grafo y su número cromático. El buscar establecer esta relación ha dado origen a una gran cantidad de conjeturas y resultados relacionados a la coloración de grafos.

1.1. Número cromático y subestructuras completas

Todo esto comienza con el Teorema de 4 colores, este problema fue propuesto por primera vez en el año 1852 por el estudiante Francis Gauthrie, quien se encontraba coloreando un mapa de los condados en Inglaterra, notando que solo bastaba usar cuatro colores para colorear. Él conjeturó que todo grafo planar puede ser coloreado con a lo más cuatro colores. Esta conjetura fue publicada por su profesor Augustus de Morgan. Luego de muchos intentos fallidos, pudo ser demostrada en 1974, por Kenneth Appel y Wolfgang Haken, analizando un gran número de configuraciones reducibles. La demostración fue mejorada en 1997 por Robertson, Sanders, Seymour y Thomas, que consiguieron reducir el número de tales configuraciones pero sigue requiriendo un chequeo computacional.

Teorema: 1 (Teorema de los 4 colores). Si G es un grafo planar, entonces $\chi(G) \leq 4$.

Es fácil ver que se tiene $\omega(G) \leq \chi(G)$ para todo grafo G , por lo que tener un número de clique alto implica que se tiene un número cromático alto. Es bajo este contexto donde se planteó la duda de si al tener un número cromático alto, implicaría la presencia de un clique grande.

Con esta duda en mente, en el año 1955, el matemático polaco Jan Mycielski [Myc55] logró demostrar que existen grafos sin triángulos con un número cromático arbitrariamente alto. Esto demuestra que el tener un número cromático alto no siempre implica tener un número de clique alto.

Teorema: 2 (Mycielski). Para todo t , existe un grafo G sin K_3 como *subgrafo* y con $\chi(G) = t$.

El contrarrecíproco del Teorema de los 4 Colores, es que si G tiene número cromático $\chi(G) \geq 5$, entonces G no es planar. Esto nos lleva al Teorema de Wagner [Wag37], propuesta en el año 1937, quien estableció los tipos de grafos que no se pueden encontrar como menores en grafos planares.

Teorema: 3 (Wagner). Un grafo G es planar si y sólo si no contiene a K_5 o $K_{3,3}$ como *menor*.

Mezclando entonces el Teorema de los 4 colores y el Teorema de Wagner se tiene que si $\chi(G) \geq 5$, entonces G contiene a K_5 o $K_{3,3}$ como *menor*. Así mientras tener un número cromático alto no nos garantiza tener un K_3 como subgrafo, tener un número cromático al menos 5 ya nos garantiza encontrar menores densos.

1.2. Introducción a la Conjetura de Hadwiger

En el año 1942 el matemático Hugo Hadwiger presentó su Conjetura en la Escuela Politécnica Federal en Zürich. Esta idea surgió como una generalización de la implicancia del Teorema de 4 Colores que acabamos de mencionar. Esta nueva conjetura usa el valor máximo de un número entero t para el cual un grafo G tiene a K_t como menor, y afirma que el valor máximo de dicho t es al menos el número cromático $\chi(G)$.

Conjetura: 1 (Hadwiger [Had43]). Todo grafo G contiene a $K_{\chi(G)}$ como menor.

Esta Conjetura se puede demostrar sin mucha dificultad para todo grafo G con $\chi(G) = 4$. Para $\chi(G) = 5$ y 6, se ha demostrado que se puede reducir al Teorema de 4 colores. Los demás casos quedan abiertos.

Como la conjetura es difícil, se han considerado versiones más débiles. Notando que $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$ para todo grafo en n vértices, Duchet y Meyniel en 1982, propusieron la siguiente conjetura:

Conjetura: 2. Sea G con n vértices, G contiene a $K_{\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \rceil}$ como menor.

Plummer, Stiebitz y Toft [PST03], realizaron un estudio exhaustivo de la Conjetura de Hadwiger para grafos con número de independencia ~ 2 , y demostraron que para estos grafos la Conjetura 1 y la Conjetura 2 son equivalentes.

Teorema: 4 (Plummer, Stiebitz, Toft). Todo grafo G con n vértices y con número de independencia ~ 2 , contiene a $K_{\lceil n/2 \rceil}$ como menor si y solo si contiene a $K_{\chi(G)}$ como menor.

Es fácil pensar que demostrar la Conjetura para grafos con número de independencia a lo más 2 sería fácil, ya que cada color tiene a lo más dos vértices, sin embargo, este caso sigue abierto. Lo mejor que se tiene es un resultado de Duchet y Meyniel que dice que todo grafo G en n vértices con número de independencia 2 contiene a $K_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}$ como menor.

Paul Seumour [Sey16] dijo: “My own belief is, if it [Hadwiger’s Conjeture] is true for graphs with independence number two then it is probably true in general, so it would be very nice to decide this case.”. Esta frase es importante, ya que intuye que si se logra resolver la Conjetura de Hadwiger para grafos con número de independencia de lo más dos, se puede resolver la Conjetura a nivel general.

1.3. Inmersiones completas y número cromático

La noción de inmersión en Teoría de Grafos es un concepto relacional que describe cómo un grafo se puede proyectar o incluir dentro de otro. Implica mapear los vértices de un grafo H a vértices distintos de un grafo G y las aristas de H a caminos arista-disjuntos de G , conservando la estructura de conexiones original.

Definición: 1 (Inmersión). Un grafo G contiene otro grafo H , con $V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$, como inmersión si hay en G vértices $u_1, \dots, u_n$ tal que si $v_i v_j \in E(H)$, entonces existe en G un camino P_{ij} entre u_i y u_j , y esos caminos son arista disjuntos en G .

A los vértices $u_1, \dots, u_n$ de G los llamamos terminales de la inmersión.

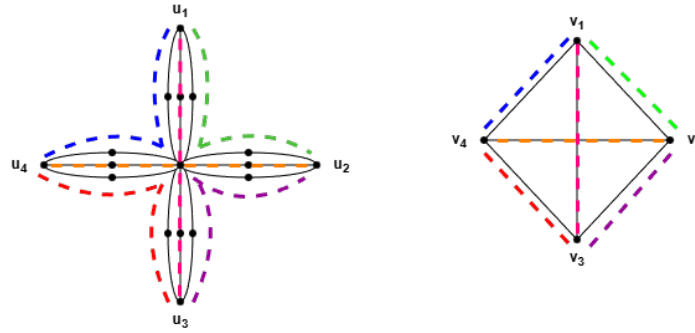


Figura 1.1: A la izquierda, se tiene el grafo G , que contiene a $H = K_4$ como inmersión, a la derecha.

Las nociones de menor e inmersión son relaciones importantes de la Teoría de Grafos. Aunque ambas buscan contener un grafo dentro de otro, ambas surgen y responden a problemas estructurales distintos. La teoría con respecto a menores presentó la mayor cantidad de resultados durante la segunda mitad del siglo XX con la obtención de resultados importantes, como lo es el Teorema de los Menores de Grafos, que muestra que la relación de menores constituye un *well-quasi-order*¹ para la clase de grafos finitos, siendo un resultado fundamental en la Teoría de Grafos, permitiendo caracterizar a las familias de grafos que son cerradas bajo menores mediante un conjunto finito de menores prohibidos.

Por otro lado, se tiene la noción de inmersión, la cual fue introducida como alternativa a la definición de menor. Siendo una definición que resultó útil para la comprensión de problemas que tienen que ver con la conectividad de aristas, rutas en redes y la estructura de grafos altamente conexos. A partir de los años 2000, fue que Robertson y Seymour extendieron varios resultados de menores para el contexto de inmersiones, logrando probar que las inmersiones también es un *well-quasi-order*, pudiendo establecer una relación entre menores e inmersiones.

Algunas diferencias entre menores e inmersiones son:

- La clase de grafos planares, aunque excluye a K_5 como menor, contiene todos los completos como inmersiones.
- La clase de grafos con grado máximo a lo más 3, aunque excluye a K_5 como inmersión, contiene todos los completos como menores.

Esto nos dice que realmente son órdenes incomparables.

Y algunas de las similitudes son:

- Ambos son *well-quasi-orders* (Robertson y Seymour, 2004, 2010 [[RS10](#)])
- Si G contiene a H como menor topológico, entonces contiene a H tanto como menor y como inmersión.

Debido a estas relaciones, una gran cantidad de investigadores han intentado trasladar resultados clásicos de menores para poder ser aplicadas también para inmersiones. Es así como en el año 1989 los matemáticos F. Lescure y H. Meyniel publicaron un artículo donde proponen una conjetura análoga a la Conjetura de Hadwiger para inmersiones.

¹Un *well-quasi-order* es una relación de contención que impide la existencia de familias infinitas de grafos mutuamente incomparables. Es decir, en cualquier secuencia infinita de grafos siempre existen dos de ellos tales que el primero está contenido en el segundo (como menor o como inmersión, según la relación considerada). Esta propiedad tiene importantes consecuencias estructurales, entre ellas que toda familia cerrada bajo dicha relación puede describirse mediante un conjunto finito de grafos excluidos.

Conjetura: 3 (Lescure y Meyniel [LM89]). Todo grafo G contiene $K_{\chi(G)}$ como inmersión.

Durante varios años, no se mostraron avances en la Conjetura. La primera respuesta a esta Conjetura fue en el año 2010, cuando DeVos, Kawarabayashi, Mohar y Okamura demostraron que la conjetura es cierta para grafos con número cromático a lo más siete.

En el año 2014 DeVos, Dvořák, Fox, McDonald, Mohar y Scheide, quienes si bien no lograron demostrar que se podía tener una inmersión en grafo G de tamaño $\chi(G)$, lograron demostrar que se puede obtener una inmersión de un grafo completo cuyo tamaño es lineal en el número cromático, es decir, probaron que un grafo contiene una inmersión de $K_{\lceil \chi(G)/200 \rceil}$, pudiendo demostrar que la conjetura es “verdadera hasta una constante multiplicativa”. A partir de este resultado, comenzó una carrera por mejorar la constante.

En el año 2017, Dvořák y Yepremyan lograron reducir el denominador de 200 a 11. Y finalmente en el año 2019, Gauthier, Le y Wollan volvieron a mejorar el resultado, el cual es el mejor hasta la fecha, donde todo grafo G con número cromático $\chi(G)$, posee una inmersión de un grafo completo de tamaño $\lceil \frac{\chi(G)}{3,54} \rceil$.

A pesar de los avances obtenidos, la conjetura de Lescure y Meyniel sigue abierta de forma general, lo que ha llevado al estudio de esta conjetura para ciertas familias de grafos, como lo son los grafos con número de independencia dos.

En el año 2017, Sylvia Vergara propuso que la Conjetura de Lescure y Meyniel se debe cumplir para grafos con número de independencia a lo más dos.

Conjetura: 4 (Vergara [Ver17]). Todo grafo G con n vértices y $\alpha(G) \leq 2$ contiene una inmersión de $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Como $\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$ para todo grafo G , se tiene que la Conjetura 3 implica la Conjetura 4, y Vergara probó que en realidad son equivalentes para grafos con número de independencia dos.

En ayuda a la resolución de la conjetura, Vergara logró demostrar que todo grafo G de n vértices y $\alpha(G) \leq 2$, contiene una inmersión de $K_{\lceil \frac{n}{3} \rceil}$. Luego, Gauthier, Le y Wollan, lograron aumentar el tamaño de la inmersión completa a $2 \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$.

Teorema: 5 (Gauthier, Le y Wollan [Qui21], 2017). Sea G un grafo con n vértices y $\alpha(G) \leq 2$. Entonces G contiene $K_{2 \lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ como inmersión.

1.4. Resultados de esta memoria

A partir de los resultados mostrados anteriormente, esta memoria quiere abordar tres problemas relacionados a la formación de inmersiones bajo ciertos parámetros del grafo, como lo son el número de independencia, el número de clique o el grado mínimo.

Estos problemas tienen como motivación hallar algunas familias de grafos que cumplen con la Conjetura de Lescure y Meyniel, en particular trabajaremos con grafos con $\alpha(G) \leq 2$, donde es equivalente a que se cumplan con la Conjetura de Vergara.

1. Hallar subgrafos inducidos en contraejemplos mínimos a la Conjetura de Vergara.

Para mostrar el Teorema 5 usaron que todo contraejemplo mínimo a la Conjetura de Vergara tiene un C_5 inducido. Con miras a dar un camino para mejorar el Teorema 5 mostraremos que todo contraejemplo mínimo a la Conjetura de Vergara contiene un grafo C_5 más un vértice adicional adyacente a exactamente 3 vértices.

2. Mostrar que todo grafo G con $\alpha(G) \leq 2$ cumple la Conjetura de Hadwiger o la Conjetura de Vergara.

Mostramos que todo grafo con $\alpha(G) \leq 2$ y grado mínimo suficientemente alto contiene a $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ como inmersión. Junto con Teorema de Chudnovsky y Seymour, entre otros, obtenemos que todo grafo G con $\alpha(G) \leq 2$ cumple la Conjetura de Hadwiger o la Conjetura de Vergara.

3. Demostrar que se cumple la Conjetura de Vergara para grafos con hasta diez vértices.

A través de los números de Ramsey, se pueden hallar ciertas estructuras en los grafos, lo que permite reducir de manera considerable el número de casos, que sin embargo, mostramos que explotan para grafos con once vértices.

Notamos además que Botler et al. [BFL⁺25] probaron que todo G con $n \geq 11$ vértices y $\alpha(G) \leq 2$, y $\Delta(G) < 19n/29 - 1$ contiene una inmersión de $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Así nuestro resultado para $n \leq 10$ completa el suyo (sin requerir la condición en $\Delta(G)$ para $n \leq 10$).

Capítulo 2

Contraejemplos mínimos a la Conjetura de Vergara

2.1. Subgrafos inducidos en contraejemplos mínimos

En esta sección estudiaremos grafos que son contraejemplos mínimos a la Conjetura de Vergara, mostrando que contienen un grafo en particular como subgrafo inducido.

Para ello usaremos los siguientes lemas:

Lema: 1 (Gauthier, Le y Wollan 2019 [GLW19]). Sea G un grafo con $\alpha(G) \leq 2$ y que sea un contraejemplo mínimo a la *Conjetura de Vergara*. Entonces G contiene un ciclo inducido de largo 5.

Este lema fue utilizado por Gauthier, Le y Wollan para probar el Teorema 5, que nos dice que todo grafo con n vértices y $\alpha(G) \leq 2$ contiene a $K_{2\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}$ como inmersión. Para probar este Teorema, ellos toman el C_5 garantizado por el lema y lo remueven del contraejemplo mínimo G . Por minimalidad $G - C_5$ contiene a $K_{2\lfloor \frac{n-5}{5} \rfloor} = K_{2\lfloor \frac{n}{5} \rfloor - 2}$ como inmersión, con lo que es suficiente agregar 2 terminales más a dicha inmersión completa. Ellos logran entonces demostrar que dos vértices del C_5 pueden ser agregados como terminales a la inmersión completa ya existente.

En este sentido nos interesa encontrar subgrafos inducidos con más vértices que el C_5 para poder intentar mejorar la cota del Teorema 5.

Junto con el Lema 1 utilizaremos el siguiente lema.

Lema: 2 (Quiroz, 2021). Sea G un grafo de n vértices con $\alpha(G) \leq 2$. Suponer que G tiene una copia inducida W de C_5 , tal que para cada $e \in E(W)$, los extremos de e , en conjunto, dominan $G - W$, y todo subgrafo propio de G satisface la *Conjetura de Vergara*. Entonces G contiene un $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ como una inmersión.

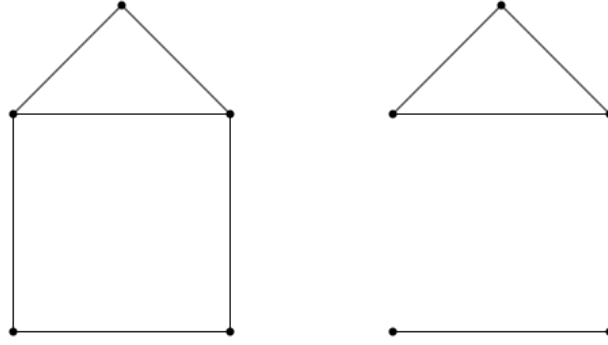


Figura 2.1: A la izquierda el grafo *house*, y a la derecha el grafo *one-wall-house* (owh)

Además por contexto mencionamos este Teorema. Donde el grafo owh en el descrito en la Figura 2.1.

Teorema: 6 (Quiroz, 2021). Sea G un grafo libre de *owh* con $\alpha(G) \leq 2$. Entonces G satisface la *Conjetura de Vergara*.

Definimos el grafo cono de helado (cdh) como el grafo que se obtiene al tomar un C_5 y añadir un vértice externo exactamente a tres vértices.

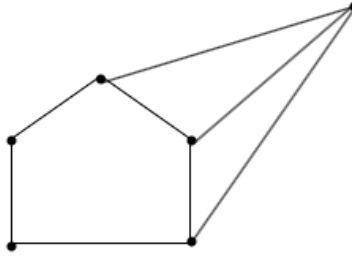


Figura 2.2: El grafo cdh

Proposición: 1. Todo contraejemplo mínimo a la Conjetura de Vergara contiene el grafo cdh como subgrafo inducido.

Demostración. 1) Sea G un contraejemplo mínimo a la *Conjetura de Vergara*. Del Lema 1: G tiene un ciclo inducido de largo 5 ($C_5 \subseteq G$).

- 2) Si cada arista de C_5 domina a $G - C_5$, entonces por minimalidad se llega a una contradicción por el Lema 2. Ya que si cada arista de C_5 domina a $G - C_5$ por el Lema 2, G tiene una inmersión de $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, cumpliendo la Conjetura de Vergara.
- 3) Por lo que debe haber una arista $e \in C_5$, que no domine a $G - C_5$. Es decir, debe existir un vértice $v \in G - C_5$ que no es adyacente a ningún extremo de e . Enumeramos los vértices del C_5 de manera natural y llamamos x_1, x_2 a los extremos de e (ver Figura 2.3).
- 4) x_3 tiene que ser vecino de v , ya que de lo contrario se formaría un conjunto independiente con v, x_3 y x_1 .
- 5) De la misma forma, v es vecino de x_4 y x_5 , ya que de lo contrario, si no es vecino de x_4 se formaría un conjunto independiente con v, x_4 y x_1 , y si no es vecino de x_5 se formaría un conjunto independiente con v, x_5 y x_2 .

Así, concluimos que

existe $v \in V(G) \setminus C_5$ tal que $|N(v) \cap C_5| = 3$

□

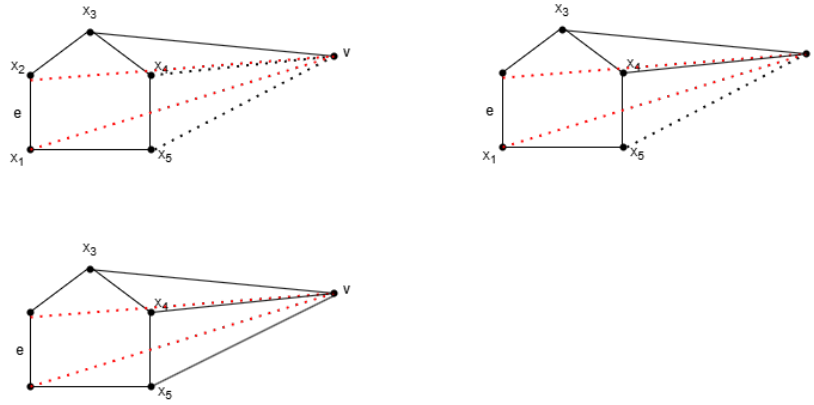


Figura 2.3: Esquema de construcción de cdh a partir de C_5

Capítulo 3

Menores o inmersiones para grafos con número de independencia dos

En esta sección demostraremos el siguiente Teorema:

Teorema: 7. Todo grafo G con $\alpha(G) \leq 2$ contiene a $K_{\chi(G)}$ como menor o como inmersión.

Es decir, todo grafo con $\alpha(G) \leq 2$ cumple la Conjetura de Hadwiger o la de Vergara.

3.1. Resultados clave

Uno de los principales resultados de interés es el siguiente teorema demostrado por Maria Chudnovsky y Paul Seymour [CS12] en el año 2016.

Teorema: 8 (Chudnovsky y Seymour, 2016). Sea G un grafo en n vértices con $\alpha(G) \leq 2$. Si el número de clique cumple

$$\omega(G) \geq \begin{cases} \frac{n}{4}, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{n+3}{4}, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

entonces G contiene a $K_{\lceil n/2 \rceil}$ como menor.

Además de tener en cuenta el Teorema 8, se tendrán los siguientes teoremas:

Teorema: 9 (Vergara [Ver17]). Sea G un grafo de n vértices con $\alpha(G) \leq 2$. Entonces G contiene a $K_{\chi(G)}$ como inmersión si y sólo si G contiene a $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ como inmersión.

Teorema: 10 (Borodin, Kostochka y Woodall [BKW97], 1997). Sea G un grafo y L es una asignación de lista a $E(G)$ de tal manera que para que cada arista $e = uv$ tenemos

$$|L(e)| \geq \max\{\deg(u), \deg(v)\} + \left\lfloor \frac{1}{2} \min\{\deg(u), \deg(v)\} \right\rfloor$$

Entonces hay un L -arista-coloreo de G .

Además usaremos el Teorema 4 mencionado en la introducción.

3.2. Hallar inmersiones a través del grado mínimo

Buscamos una condición de grado mínimo que nos garantice una inmersión de $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Notar que el siguiente Teorema es válido para cualquier grafo sin importar su número de independencia.

Para todo grafo G y $v \in V(G)$, denotamos $\overline{N}(v) = V(G) \setminus (N(v) \cup \{v\})$. Es decir, $\overline{N}(v)$ son los los vértices de G que no son vecinos de v , incluyendo al vértice v .

Teorema: 11. Sea G un grafo con n vértices y

$$\delta(G) \geq \begin{cases} n - \lceil \frac{n}{4} \rceil, & \text{si } n \text{ es par,} \\ n - \lceil \frac{n+3}{4} \rceil, & \text{si } n \text{ es impar,} \end{cases}$$

Entonces G contiene a $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ como inmersión.

Demostración. Tomar cualquier conjunto $A \subset V(G)$ con $|A| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, $B = V(G) \setminus A$, y dejar:

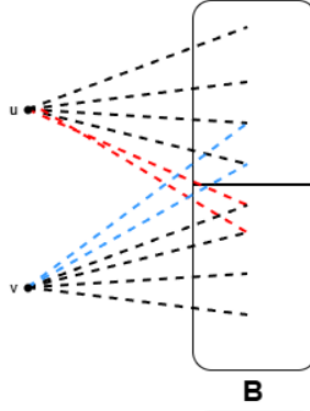
$$b = \begin{cases} \lceil \frac{n}{4} \rceil, & \text{si } n \text{ es par,} \\ \lceil \frac{n+3}{4} \rceil, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Si se elige a A como el conjunto de terminales de la inmersión, hay que hallar caminos que pasen por B para todo par de vértices no adyacentes en A , por lo que se deben elegir los caminos de otra forma para evitar que tengan aristas en común, y con esto se podrá corregir cada par de vértices terminales no adyacentes (formar caminos arista-disjuntos) para obtener la inmersión.

Para todo $v \in V(G)$, establecemos $m_v := |\overline{N}(v) \cap A|$. Por la elección de $\delta(G)$ tenemos

$$|N(v) \setminus A| \geq \delta(G) - |N(v) \cap A| \geq n - b - \left(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 - m_v \right) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - b + m_u + 1.$$

Con esto podemos dar una cota para el número de vecinos en común de u y v fuera de A , es decir, los vecinos en común en B .



Por lo que el tamaño de B es

$$|B| = |N(u) \cap B| + |N(v) \cap B| - |N(u) \cap N(v) \cap B|$$

Y como B es todo lo que no está en A , la cantidad de vecinos en común de u y v fuera de A es

$$|N(u) \cap N(v) \setminus A| = 2 \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - b \right) + m_u + m_v + 2 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \geq m_u + m_v - 1 \quad (3.1)$$

$n \pmod{4}$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2b$
1	$\frac{n-1}{2} - \frac{n+3}{2} = -2$
2	$\frac{n}{2} - \frac{n+2}{2} = -1$
3	$\frac{n-1}{2} - \frac{n+5}{2} = -3$

(ver tabla)

Ahora consideremos el complemento de $G[A]$. Para toda arista $e = uv$ de $\overline{G[A]}$ asignamos la lista $L(e) = N(u) \cap N(v) \setminus A$. Por (3.1) y definición de m_u y m_v tenemos

$$|L(e)| \geq m_u + m_v - 1 = \deg_{\overline{G[A]}}(u) + \deg_{\overline{G[A]}}(v) - 1$$

que por el Teorema 10 implica que hay una coloración de aristas φ de $\overline{G[A]}$ de las listas dadas.

Para corregir cada no-arista $e = uv$ en $G[A]$ usamos el camino $u\varphi(e)v$. Dado que φ es una coloración de aristas (de $\overline{G[A]}$), tenemos que si $e, e' \in E(G[A])$ con $v \in e \cap e'$, entonces $\varphi(e) \neq \varphi(e')$, y la arista $\varphi(e)v$ es usado sólo en un camino, garantizando que los caminos usados sean mutuamente arista-disjuntos. $\square$

Con este resultado, estamos listos para demostrar el Teorema 7.

Demostración. Sea G un grafo de n vértices tal que $\alpha(G) = 2$. Por contradicción, si tenemos $\omega(G) \geq \frac{n}{4}$ para n par, o $\omega(G) \geq \frac{n+3}{4}$ para n impar, entonces el Teorema 8 nos dice que G contiene a $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ como menor. Pero entonces el Teorema 4, nos dice que G contiene a $K_{\chi(G)}$ como menor, contradiciendo la elección de G .

Por lo tanto, podemos suponer que tenemos $\omega(G) \leq \lceil \frac{n}{4} \rceil - 1$ si n es par o $\omega(G) \leq \lceil \frac{n+3}{4} \rceil - 1$ si n es impar. Pero, ya que $\alpha(G) = 2$, todo vértice v satisface que $\bar{N}(v)$ es un subgrafo completo. De este modo, si v presencia el grado mínimo, tenemos $\delta(G) = n - 1 - |\bar{N}(v)| \geq n - 1 - \omega(G)$, y de este modo

$$\delta(G) \geq \begin{cases} n - \lceil \frac{n}{4} \rceil, & \text{si } n \text{ es par,} \\ n - \lceil \frac{n+3}{4} \rceil, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Pero entonces el Teorema 11, nos indica que G contiene a $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ como inmersión, y el Teorema 9 nos dice que G contiene a $K_{\chi(G)}$ como una inmersión, generando una contradicción. $\square$

Capítulo 4

Inmersiones en grafos pequeños con número de independencia dos

4.1. Introducción a los números de Ramsey

La Teoría de Ramsey [Ram30], denominada así en honor a Frank P. Ramsey, corresponde al estudio matemático que ve las condiciones bajo las cuales debe aparecer el orden. Los problemas de la Teoría de Ramsey responden a la pregunta “¿Cuántos elementos debe contener una estructura para garantizar la existencia de una subestructura particular?”.

Definición: 2 (Número de Ramsey). El número de Ramsey $r(s, t)$, es el menor número entero tal que todo grafo con $r(s, t)$ vértices contiene un grafo completo en s vértices o un conjunto independiente en t vértices.

En este caso nos interesan sólo grafos con menos que $r(5, 3)$ vértices.

s/t	1	2	3	4	5	6
2	1	2				
3	1	3	6			
4	1	4	9	18		
5	1	5	14	25	43 – 49	
6	1	6	18	35 – 41	58 – 87	102 – 165

Cuadro 4.1: Tabla de cotas de los números de Ramsey para s, t pequeños.

4.2. Obtención de inmersiones de $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ en grafos pequeños

Teorema: 12. Si G tiene n vértices, con $n \leq 10$ y $\alpha(G) \leq 2$, entonces G contiene a $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ como inmersión.

Demostración. Los casos pares se obtienen de los impares anteriores, porque:

$$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil \quad \text{cuando } n \text{ es par.}$$

Así podemos concentrarnos en los casos con n impar.

Si $n = 1$, queremos una inmersión de K_1 , que se tiene trivialmente. Y si $n = 3$ estamos buscando un K_2 , que se tiene trivialmente por el número de independencia. Así tenemos el resultado para $n \leq 4$.

$$n = 5 \left(\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3 \right)$$

Veamos que G tiene un ciclo y por tanto una inmersión de K_3 . Para todo vértice v , $\bar{N}(v)$ induce un completo, por lo que se asume que $|\bar{N}(v)| \leq 2$, para cada $v \in V(G)$. Por tanto tenemos $\delta(G) \geq 2$. Tomo $v_1 \in V(G)$ adyacente a los vértices v_2 y v_3 , y si $v_2v_3 \in E(G)$ o $N(v_2) \cap N(v_3) \neq \{v_1\}$, entonces tenemos o un C_3 o un C_4 . En otro caso, existe $v_4 \in N(v_2)$, $v_5 \in N(v_3)$, pero como $\delta(G) \geq 2$, v_4 tiene un vecindario distinto de v_2 y así se forma un ciclo, y trivialmente, una inmersión de K_3 .

$$n = 7 \left(\left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil = 4 \right)$$

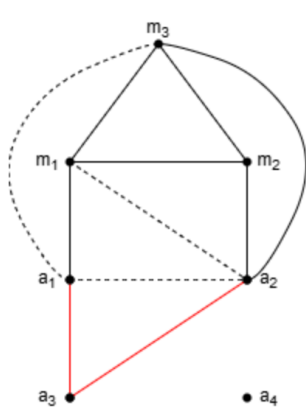
Si G tiene $\alpha(G) \leq 2$, con 7 vértices, demostrar que G contiene a un K_4 como inmersión.

Por resultado de Teoría de Ramsey, se tiene que si $\alpha(G) \leq 2$ y $n \geq 6$, entonces G contiene como subgrafo a K_3 , por lo que G contiene un subgrafo completo con un conjunto de vértices $M = \{m_1, m_2, m_3\}$. El grafo $G - M$ en los vértices a_1, a_2, a_3, a_4 debe tener un conjunto de vértices no adyacentes, digamos a_1, a_2 , o de lo contrario, se tendría a K_4 como subgrafo. Además, ninguno de a_1, a_2 puede ser adyacente a todo M . Como a_1, a_2 no son adyacentes, dominan el resto del grafo, por lo que podemos suponer, sin pérdida de generalidad $a_1m_1, a_2m_2, a_2m_3 \in E(G)$, mientras que $a_1m_3, a_2m_1 \notin E(G)$. Como $\alpha(G) \leq 2$, $\bar{N}(v)$ es un completo para cada $v \in V(G)$, y como no se tiene a K_4 como subgrafo, tenemos $|\bar{N}(v)| \leq 3$ para cada v . Esto, junto con nuestra suposición que $a_1m_3, a_2m_1 \notin E(G)$ nos da que cada uno de a_1, a_2 debe ser adyacente a uno de a_3, a_4 .

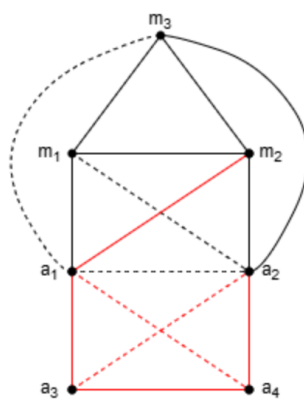
Si ambas son adyacentes al mismo vértices $a_i, i \in \{3, 4\}$ (digamos a_1 y a_2 adyacentes a a_3), entonces podemos hallar una inmersión de $K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, de terminales a_2, m_1, m_2, m_3 , usando el camino a_2, a_i, a_1, m_1 .

Así, podemos suponer que $a_1a_3, a_2a_4 \in E(G)$, mientras que $a_1a_4, a_2a_3 \notin E(G)$. Puesto que $|\bar{N}(a_1)| \leq 3$, debemos tener que $a_1m_2 \in E(G)$. Esto especifica completamente los vecindarios de a_1 y a_2 . En particular, cada uno tiene exactamente dos vecinos en M .

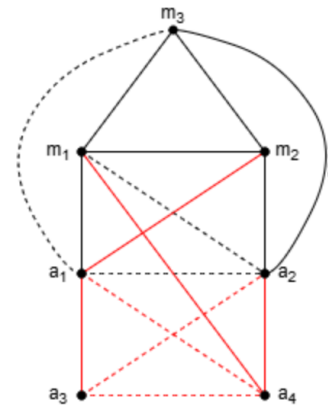
Si tenemos $a_3a_4 \in E(G)$, podemos obtener una inmersión de un completo con vértices terminales $M \cup \{a_2\}$ usando el camino a_2, a_4, a_3, a_1, m_1 . Por lo tanto, asumimos que no tenemos esa arista. Entonces, por simetría, los argumentos dados en el párrafo anterior nos indican que a_3 y a_4 tienen exactamente dos vecinos en M . Nótese que no podemos tener $N(a_4) \cap M = \{m_2, m_3\}$, ya que esto implicaría que m_2, m_3, a_2, a_4 inducen el subgrafo K_4 . Por lo tanto, tenemos $a_4m_1 \in E(G)$, y podemos obtener la inmersión deseada usando el camino a_2, a_4, m_1 .



(a) a_1 y a_2 son adyacentes a a_3



(b) $a_1a_3, a_2a_4, a_3a_4 \in E(G)$



(c) $a_1a_3, a_2a_4 \in E(G)$ y $a_3a_4 \notin E(G)$

$$n = 9 \left(\left\lceil \frac{9}{2} \right\rceil = 5 \right)$$

Si G tiene $\alpha(G) \leq 2$, con 9 vértices, demostrar que G contiene a un K_5 como inmersión.

Se tiene que $R(4, 3) = 9$. Por lo que todo grafo con $n \geq 9$ vértices contiene a K_4 o $\overline{K}_3$. Como G tiene $\alpha(G) \leq 2$, es decir, no contiene a $\overline{K}_3$, entonces contiene a K_4 . Se puede empezar desde este K_4 para obtener la inmersión de K_5 .

Se define $H := K_4 \subset G$ y $F = V(G) \setminus H$. Para contradicción, suponer que: cada vértice de F tiene a lo más un vecino en H . Si F no es K_5 , entonces se toma $u, v \in F$ con $uv \notin E(G)$. Como u tiene 3 no vecinos en H , y v igual, por palomar tienen un no vecino en común, lo que contradice $\alpha(G) \leq 2$.

Por lo tanto, existe un vértice en F que es vecino de al menos dos vértices de H . Además tiene un no vecino en F . Tomamos v con estas dos propiedades, tal que maximice $|N(v) \cap H|$.

Como $\alpha(G) \leq 2$,

$$\text{cada vez que } uv \notin E(G), \text{ entonces } V(G) - \{u, v\} \subseteq N(u) \cup N(v) \quad (1)$$

Por lo tanto cualquier no vecino de v en F es vecino de todos en $\bar{N}(v) \cap H$ (los no vecinos de uno deben ser vecinos de otro). Con esto en mente, si $y \in \bar{N}(v) \cap H$ buscamos un camino de la forma v, w, x, y donde $w \in N(v) \cap F$ y $x \in \bar{N}(v) \cap F$. Buscaremos una inmersión K_5 con terminales $V(H) \cup \{v\}$. Así, tenemos que hallar aristas entre $N(v) \cap F$ y $\bar{N}(v) \cap F$, para garantizar los caminos entre v y $\bar{N}(v) \cap H$. Notar que necesitamos que estos caminos sean arista disjuntos y disjuntos de las aristas en $G[V(H) \cup \{v\}]$.

Consideraremos casos a partir del tamaño de $N(v) \cap H$. Ya hemos visto que $|N(v) \cap H| \geq 2$ y si $|N(v) \cap H| = 4$, entonces ya tenemos a K_5 como subgrafo. Así solo debemos considerar los casos $|N(v) \cap H| = 2, 3$.

Antes de considerar los casos, notamos que como $\alpha(G) \leq 2$ impide que existan tres vértices mutuamente no adyacentes, por lo tanto $\delta(G) \geq 4$.

■ Caso 1: $|N(v) \cap H| = 2$.

Sea $\{a, b, c, d\} = V(H)$, u_1 y u_2 vecinos de v en F que existen porque $\delta(G) \geq 4$ y elección del caso.

Por elección de v , todo vértice de F con un no vecino en F tiene $|N(v) \cap H| \leq 2$. Así, como se tiene $\delta(G) \geq 4$, obtenemos que

$$\text{todo vértice de } F \text{ tiene al menos dos vecinos en } F \quad (2)$$

• Subcaso 1.1: $|N(v) \cap F| = 2$

Primero suponer además que v tiene exactamente dos vecinos en F .

Sean u_3 y u_4 los dos no vecinos de v en F . Además decimos que $N(v) \cap H = \{a, b\}$

Como $u_3, u_4 \notin N(v)$, se tiene que tanto u_3 como u_4 son vecinos de c y d , por la ecuación (1).

Notemos que

$$\text{para } j = 3, 4, |N(u_j) \cap \{u_1, u_2\}| \geq 1 \quad (3)$$

porque $u_3, u_4 \notin N(v)$ y (2).

Suponer que SPG: $u_1 \in N(u_3)$ y $u_2 \in N(u_4)$. Entonces se forman los caminos v, u_1, u_3, c y v, u_2, u_4, d , formando la inmersión.

Por lo contrario, debe haber $i \in \{1, 2\}$ con $u_3, u_4 \notin N(u_i)$. Digamos que $i = 2$. Por (2), $u_1 \in N(u_2)$, y por ecuación (3) podemos tomar los caminos v, u_1, x, c y v, u_2, u_1, y, d , formando la inmersión de K_5 .

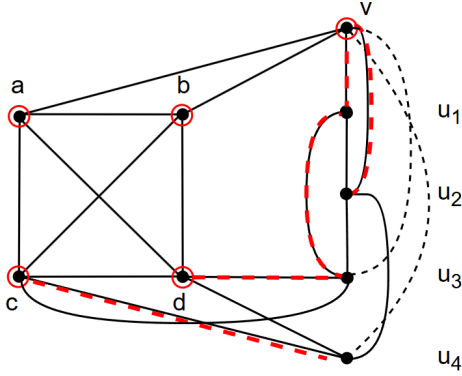


Figura 4.2: $u_1 \in N(u_3), u_2 \in N(u_4)$

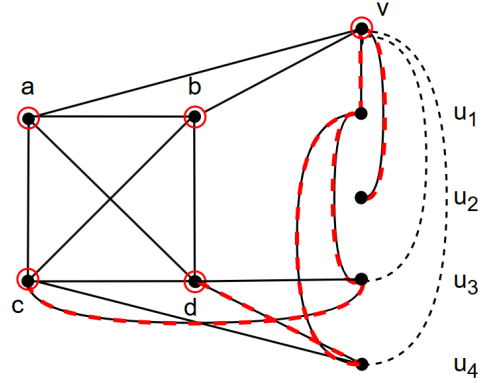


Figura 4.3: $u_3, u_4 \notin N(u_2)$

- Subcaso 1.2: $|N(v) \cap F| = 3$

Luego, suponer que v tiene exactamente tres vecinos en F . Sea u_4 el no vecino de v en F , u_1, u_2, u_3 los demás vértices en F . Tenemos que u_4 debe ser vecino de c y d para no formar un $\bar{K}_3$. Por (2), en el peor caso, v y u_4 comparten dos vecinos en F digamos u_2 y u_3 . De esa forma ya hay caminos v, u_2, u_4, c y v, u_3, u_4, d que unen v con c y d , y nos dan la inmersión.

¹

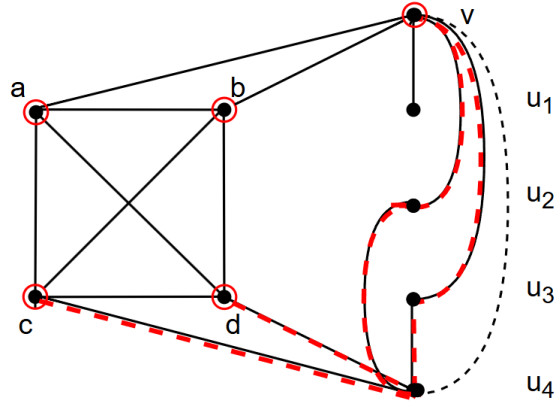


Figura 4.4: v y u_4 son vecinos de u_2 y u_3

- Caso 2: $|N(v) \cap H| = 3$.

Sea d el no vecino de v en H .

¹Como será útil más adelante, notamos que en el Caso 1, siempre obtenemos una inmersión con terminales $\{v\} \cup V(H)$.

- Subcaso 2.1: $|N(v) \cap F| = 2$

Suponer además que v tiene exactamente dos vecinos en F .

Sean u_1 y u_2 los vecinos de v en F , y x e y los no vecinos de v en F . Tanto x como y deben ser vecinos de d , para no formar un conjunto independiente de tamaño 3.

Si $E(\{u_1, u_2\}, \{x, y\}) \neq \emptyset$, siempre habrá un camino desde v hasta d , siendo este el camino v, u_1, x o v, u_1, y o v, u_2, x o v, u_2, y .

Para contradicción tomo $E(\{u_1, u_2\}, \{x, y\}) = \emptyset$. Por grado mínimo u_1 tiene dos vecinos en H , que para que no forme un conjunto independiente 3, debe ser a y b , y con el camino u_1, u_2, d, c se forma una inmersión K_5 de terminales $\{a, b, c\} \cup \{v, u_1\}$.

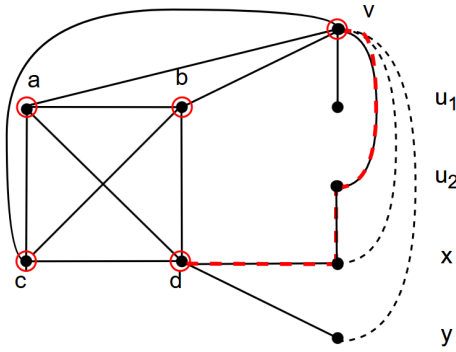


Figura 4.5: $E(\{u_1, u_2\}, \{x, y\}) \neq \emptyset$

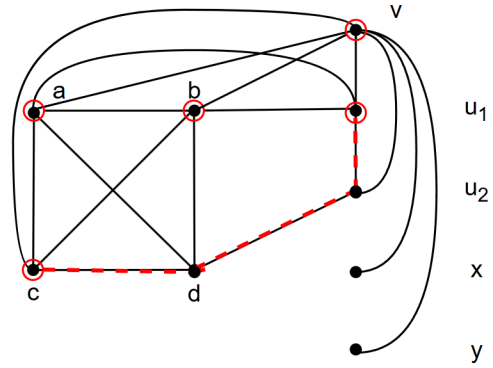


Figura 4.6: $E(\{u_1, u_2\}, \{x, y\}) = \emptyset$

- Subcaso 2.2: $|N(v) \cap F| = 3$

Suponer que v tiene tres vecinos en F .

Sea u_1, u_2, u_3 los vecinos de v en F . Se tiene que x debe ser vecino de d , pues de lo contrario, se formaría un conjunto independiente de tamaño 3.

Si $E(\{u_1, u_2, u_3\}, \{x\}) \neq \emptyset$, siempre habrá un camino de v hasta d .

Para contradicción tomo $E(\{u_1, u_2, u_3\}, \{x\}) = \emptyset$, por el grado mínimo de x , debe tener sus cuatro vecinos en H , formando una inmersión K_5 .

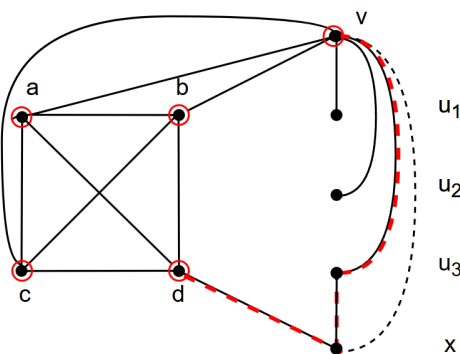


Figura 4.7: $E(\{u_1, u_2, u_3\}, \{x\}) \neq \emptyset$

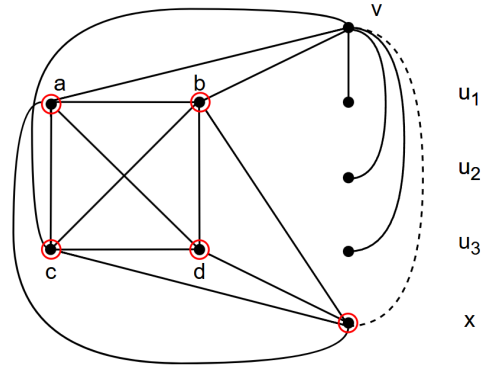


Figura 4.8: $E(\{u_1, u_2, u_3\}, \{x\}) = \emptyset$

□

4.3. Complicaciones para grafos más grandes

Para dar una muestra de como explota el número de casos cuando $n \geq 11$, analizaremos un caso particular para grafos con $n = 11$. Recordemos que por la tabla 4.1, todo grafo con $n \geq 9$ y $\alpha(G) \leq 2$ contiene un K_4 como subgrafo.

Proposición: 2. Sea G un grafo en $n = 11$ vértices con $\alpha(G) \leq 2$. Sea H un subgrafo de G con $H = K_4$. Si existe un vértice $v \in G - H$ con $|N(v) \cap H| = 4$, entonces G contiene a $K_6 = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ como inmersión.

Demostración. Si $\alpha(G) \leq 2$, quiere decir que no hay tres vértices no adyacentes. Debido a esto, para cualquier vértice v , todo par de vértices no adyacentes a v deben formar una arista. Es decir, el conjunto de vértices no adyacentes a v induce un subgrafo completo. Por lo tanto, $G[V(G) \setminus (\{v\} \cup N(v))]$ es completo. Para todo v , si $|N(v)|$ es pequeño, entonces se forma un completo grande en G y se puede generar un K_6 . En conclusión, tenemos $\delta(G) = n - 1 - \omega(G)$ y como $\omega(G) \leq 5$, entonces se tiene $\delta(G) \geq 5$.

Se define $F := G \setminus H$. Y escogemos un vértice v' , el cual es el vecino de v en F con más vecinos en H . Así decimos que $F = \{v, v', u_1, \dots, u_5\}$.

Si $V(H) \subset N(v')$ entonces $G[V(H) \cup \{v, v'\}] = K_6$.

Podemos asumir entonces que $\forall u \in N(v) \cap F$, $V(H) \not\subset N(u)$. Decimos además que $V(H) = \{a, b, c, d\}$.

- Caso 1: $|N(v') \cap H| = 2$

Digamos $N(v') \cap H = \{a, b\}$.

- Subcaso 1.1: v' tiene un no vecino en F .

Notar que en Teorema 12, cuando $n = 9$, se escoge v con un no vecino en F y al menos dos vecinos en H . Así usando a v' como ese v , en el actual $G - v$, el Caso 1 de aquella demostración nos dice que $G - v$, contiene una inmersión con terminales $V(H) \cup \{v'\}$. Así, G contiene una inmersión con terminales $V(H) \cup \{v, v'\}$.

- Subcaso 1.2: v' es vecino de todo F .

Existen $u_i u_j$ con $u_i u_j \notin E(G)$, pues de otro modo $v', u_1, \dots, u_5$ inducirán un K_6 . Uno de $u_i u_j$ debe ser vecino de c , digamos $u_i c \in E(G)$. Si existe $k \neq i$, con $u_k d \in E(G)$, entonces tomo caminos v', u_i, c y v', u_k, d , para la inmersión de terminales $V(H) \cup \{v, v'\}$.

Si $u_i \in N(v)$, por elección de v' , $|N(u_i) \cap H| \leq 2$, de hecho, $N(u_i) \cap H = \{c, d\}$ (al ser $v' u_i \notin E(G)$).

Así, podemos usar el Caso 1 del Teorema 12 cuando $n = 9$ para ver que $G - v$ tiene una inmersión completa en $\{u_i\} \cap H$ como terminales, y por tanto G tiene una inmersión con $\{v, u_i\} \cup H$ como terminales.

Podemos asumir entonces que $u_i \notin N(v)$. Es fácil ver que podemos asumir que $|N(u_i) \cap H| \leq 3$, pues de otro modo tendríamos una inmersión con terminales $V(H) \cup \{v, u_i\}$ usando el camino v, v', u_i . Así como $\delta(G) \geq 5$, $\exists u_l$ con $u_l \in N(u_i)$. Como v' es vecino de todo F , podemos usar los caminos v', u_l, u_i, d y v', u_i, c para la inmersión con terminales $\{v, v'\} \cup V(H)$.

■ Caso 2: $|N(v') \cap H| = 3$

Sea $N(v') \cap H = \{a, b, c\}$.

• Subcaso 2.1: $N(v') \cap F = F$

Como $d \notin N(v')$, entonces dado que $\delta(G) \geq 5$, d y v' tienen un vecino en común u_i , y podemos usar el camino d, u_i, v' para tener una inmersión en $V(H) \cup \{v, v'\}$.

• Subcaso 2.2: $|\bar{N}(v') \cap F| = 1$.

Sea u_5 el no vecino de v' en F . Si hay un vértice $u_1, \dots, u_4$ que es vecino de u_5 , tenemos una inmersión con terminales $\{v, v'\} \cup V(H)$. De otro modo, como $d(u_5) \geq \delta(G) \geq 5$, entonces $\{v, u_5\} \cup V(H)$, induce un K_6 .

• Subcaso 2.3: $|\bar{N}(v') \cap F| = 2$.

Sean u_4 y u_5 los no vecinos de v' en F . Si hay un vértice en v', u_1, u_2, u_3 que es vecino de u_4 o u_5 , tenemos una inmersión de K_6 con terminales $\{v, v'\} \cup V(H)$.

De lo contrario, y si $u_4 u_5 \notin E(G)$, entonces por grado mínimo, $\{v, u_5\} \cup V(H)$ induce un K_6 . Si $u_4 u_5 \in E(G)$, notamos que u_4 y u_5 ambos tienen cuatro vecinos en $\{v\} \cup V(H)$. Si comparten cuatro vecinos en $\{v\} \cup V(H)$, entonces se forma K_6 como subgrafo. Así, u_4 tiene un vecino en $\{v\} \cup V(H)$ que no es vecino de u_5 , digamos que este es v . En este caso, tenemos una inmersión de K_6 , con terminales $\{v, u_5\} \cup V(H)$ usando el camino v, u_4, u_5 para suplir la arista que falta.

• Subcaso 2.4: $|\bar{N}(v') \cap F| = 3$.

Sea $\{v, u_1, u_2\} = N(v') \cap F$ y $\{u_3, u_4, u_5\} = \bar{N}(v') \cap F$.

Si existe un par i, j con $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{3, 4, 5\}$ con $u_i u_j \in E(G)$ entonces tomamos el camino v', u_i, u_j, d para la inmersión de K_6 con terminales $V(H) \cup \{v, v'\}$.

Podemos asumir entonces que $E(\{u_1, u_2\}, \{u_3, u_4, u_5\}) = \emptyset$. Podemos asumir también que $u_1, u_2 \notin N(d)$, o ya tendríamos la inmersión deseada. Si además tenemos $u_1 u_2 \notin E(G)$, entonces como $\delta(G) \geq 5$, $(V(H) \setminus \{d\}) \cup \{v, v', u_1\}$ induce un K_6 .

Así suponemos $u_1 u_2 \in E(G)$. Por $\delta(G) \geq 5$, u_1 tiene tres vecinos en v, a, b, c , y lo mismo para u_2 . Digamos $a, b, c \in N(u_1)$. Si además $a, b, c \in N(u_2)$ entonces a, b, c, v', u_1, u_2 inducen un K_6 . Así, hay un vértice en v, a, b, c que no es vecino de u_1 y es vecino de u_2 , digamos que es v . Así tenemos una inmersión con terminales a, b, c, v, v', u_1 , usando el camino u_1, u_2, v para suplir la arista que falta.

• Subcaso 2.5: $|\bar{N}(v') \cap F| = 4$.

Digamos $u_1 \in N(v') \cap F$. Si existe $j \in \{2, 3, 4, 5\}$ con $u_j \in N(u_1)$, obtenemos una inmersión en $V(H) \cup \{v, v'\}$ usando $v' u_i u_j d$ para suplir la arista que falta.

Así podemos asumir $u_2, u_3, u_4, u_5 \in \bar{N}(u_1)$ y, más aún, $d \notin N(u_1)$. En ese caso, por $\delta(G) \geq 5$, tenemos que a, b, c, v, v', u_1 inducen un K_6 .

■ Caso 3: $|N(v') \cap H| = 1$

Sea $N(v') \cap H = \{a\}$. Por el grado mínimo de G , v' puede tener a los más dos no vecinos de F .

• Subcaso 3.1: $|\bar{N}(v') \cap F| = 1$.

Decimos $u_i \notin N(v')$. Tenemos $b, c, d \in N(u_i)$. Si $a \in N(u_i)$ y $v \in N(u_i)$, $G[\{a, b, c, d, v, u_i\}] = K_6$.

Si $a \in N(u_i)$ entonces $v \notin N(u_i)$. Como $\delta(G) \geq 5$, existe u_j con $u_j \in N(u_i)$. Pero $u_j \in N(v')$, así el camino u_i, u_j, v', v nos ayuda a completar una inmersión de K_6 con terminales a, b, c, d, v, u_i .

Si $v \in N(u_i)$ y $a \notin N(u_i)$. Uso el camino u_i, u_j, v', a para una inmersión de K_6 con terminales a, b, c, d, v, u_i , siendo $u_j \in N(u_i)$.

Si $v \notin N(u_i)$ y $a \notin N(u_i)$. Como $\delta(G) \geq 5$, existe u_j, u_k vecinos de u_i , y usando los caminos u_i, u_j, v', v y u_i, u_k, v', a , se obtiene una inmersión completa de K_6 con terminales a, b, c, d, v, u_i .

- Subcaso 3.2: $|\bar{N}(v') \cap F| = 2$.

Tenemos $\{b, c, d\} \subseteq N(u_i)$ y $\{b, c, d\} \subseteq N(u_j)$. Si existe $k \in \{i, j\}$ tal que $a, v \in N(u_k)$, el grafo $G[\{a, b, c, d, v, u_k\}] = K_6$.

De otro modo, si $u_i u_j \notin E(G)$, por $\delta(G) \geq 5$ y $v \notin N(u_i)$, existe $u_k, k \neq j$, tal que $u_k \in N(u_i)$. Usando el camino u_i, u_k, v', v se obtiene una inmersión de K_6 con terminales a, b, c, d, v, u_i .

Ahora, supongamos $a \in N(u_i)$ y $v \in N(u_j)$. Si $u_i u_j \in E(G)$, uso el camino u_i, u_j, v y se tiene una inmersión de K_6 con terminales a, b, c, d, v, u_i . Si no existe dicha arista, entonces por $\delta(G) \geq 5$, existe $u_k \neq u_j$ con $u_k \in N(u_i)$, usando el camino u_i, u_k, v', v para obtener una inmersión de K_6 con terminales a, b, c, d, v, u_i .

Si suponemos $v \in N(u_i)$, $v \in N(u_j)$, si $u_i u_j \in E(G)$, entonces $G[\{b, c, d, v, u_i, u_j\}] = K_6$. De otro modo, si $u_i u_j \notin E(G)$, existe $u_k \neq u_j$ con $u_k \in N(u_i)$ y $u_{k'} \neq u_i$ con $u_{k'} \in N(u_j)$. La secuencia $u_i, u_k, v', u_{k'}, u_j$ contiene un $(u_i u_j)$ -camino que usamos para completar que usamos para formar una inmersión de K_6 con terminales b, c, d, v, u_i, u_j .

Suponemos que $a, v \notin N(u_i)$ y $a, v \notin N(u_j)$. Si $|N(u_i) \cap N(u_j) \cap F| = 1$ (digámosle $\{u_k\}$), entonces hay aristas $u_i u_l, u_j u_m$ con i, j, k, l, m distintos, tomando los caminos $P_1 = u_i, u_l, v', a$, $P_2 = u_j, u_m, v', v, a$ y $P_3 = u_i, u_k, u_j$ se obtiene una inmersión de K_6 con terminales a, b, c, d, u_i, u_j .

Por último, suponer que si $N(u_i) \cap N(u_j) = \{u_k, u_l\}$, por $\delta(G) \geq 5$, v' debe tener otros tres vecinos en F (además de v) que no son u_i ni u_j , digámosle u_m, u_k y u_l . Además, u_m debe tener al menos un vecino de F , siendo u_i o u_j , o sus vecinos en común u_k o u_l (suponer que es u_i). Por lo que usando los caminos $P_1 = v', u_k, u_i, b$, $P_2 = v', u_l, u_j, c$ y $P_3 = v', u_m, u_i, d$, se tiene una inmersión de K_6 con terminales a, b, c, d, v, v' .

- Subcaso 3.3: v' ve a todo F ($F \subseteq N(v')$).

Tiene que haber en F una arista $u_i u_j \notin E(G)$, pues si no, $F \setminus v$ induce un K_6 .

Puedo asumir $|N(u_i) \cap H| \geq 2$.

Si $|N(u_i) \cap H| = 2$, por caso similar $n = 9$ del Teorema 12, hay una inmersión completa de K_5 con terminales $\{u_i\} \cup H$, que con el camino u_i, v', v , forma una inmersión de K_6 con terminales en $\{u_i, v\} \cup H$.

Si $|N(u_i) \cap H| = 3$, asumo $N(u_i) \cap H = \{a, b, c\}$. Si $v \in N(u_i)$, el camino u_i, v', u_j, d , se tiene una inmersión de K_6 con terminales a, b, c, d, v, u_i . Así, asumo $v \notin N(u_i)$, por $\delta(G) \geq 5$, existe $u_k \neq u_j$ con $u_k \in N(u_i)$, uso los caminos $P_1 = u_i, v', u_j, d$ y $P_2 = u_i, u_k, v', v$ para inmersión de K_6 con terminales a, b, c, d, v, u_i .

■ Caso 4: $|N(v') \cap H| = 0$

- Subcaso 4.1: Existe algún u_i con $u_i \notin N(v')$.

Tenemos $a, b, c, d \in N(u_i)$. Si $v \in N(u_i)$, se obtiene K_6 a través de los vértices a, b, c, d, v, u_i . Entonces, si $v \notin N(u_i)$, por $\delta(G) \geq 5$, existe $u_j \in N(u_i)$, Y usando el camino u_i, u_j, v', v para tener una inmersión de K_6 con terminales a, b, c, d, v, u_i .

- Subcaso 4.2: $F \subseteq N(v')$.

Se tiene el mismo caso que en 3.3, por lo que para cada caso se tiene una inmersión de K_6 .

□

Capítulo 5

Glosario de términos

Definición: 3. Un grafo G es un par ordenado $G = (V, E)$ donde V es un conjunto de elementos llamados vértices y E es un conjunto de pares de elementos de V , llamados aristas.

Definición: 4 (Coloreo de Grafos). Corresponde a una asignación de colores a los vértices de un grafo G , siendo el coloreo una función $c : V(G) \rightarrow S$ tal que $c(u) \neq c(v)$ si $uv \in E(G)$.

El **número cromático** $\chi(G)$ de un grafo G es el menor número de colores con los que puedo colorear a G .

Definición: 5 (Grafo completo). Es un grafo tal que todo par de vértices distintos son adyacentes, es decir, cada vértice del grafo está conectado a todos los demás vértices.

Un grafo completo con n vértices se denota K_n .

Llamamos el **número de clique**, denotado por $\omega(G)$ al tamaño máximo de un subgrafo completo en G .

Definición: 6 (Grafo libre de H). Para grafos G y H decimos que G está libre de H si G no contiene ningún subgrafo inducido isomorfo a H .

Definición: 7 (Subgrafo). Sea $G = (V, E)$, si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, decimos que $G' = (V', E')$ es un subgrafo. Es decir, se puede eliminando vértices y aristas.

Definición: 8 (Menor). H es menor de G si puedo obtener H a partir de G tras posiblemente borrar aristas, borrar vértices o contraer aristas.

Se dice que H es **menor topológico** de G , si se obtiene H a partir de G , removiendo vértices y aristas de G y contrayendo vértices de grado 2.

Definición: 9 (Aristas dominantes). Se dice que una arista $e = xy$ domina un grafo G , si y sólo si $\forall v \in G, v \sim x$ o $v \sim y$.

Definición: 10 (Conjunto independiente). Es un conjunto de vértices de un grafo G tal que ninguno de los vértices es adyacente a otro.

El número de independiencia $\alpha(G)$ es el tamaño máximo de un conjunto independiente de vértices.

Definición: 11 (Subgrafo inducido). Un subgrafo inducido por $U \subseteq G$ es el grafo obtenido de G al borrar $V(G) \setminus U$. Se denota $G[U]$.

Definición: 12 (Complemento de un grafo). El complemento $\overline{G}$ de un grafo G , es el grafo en $V(G)$ que tiene una arista xy sí y sólo sí $xy \notin E(G)$.

Definición: 13 (Coloreo de aristas). Para un grafo $G = (V, E)$, coloreo de aristas es una función $c : E \rightarrow S$ con $c(e) \neq c(f)$ son aristas adyacentes.

Definición: 14 (Lista). Una lista de un grafo G es el conjunto de colores permitidos que se asigna a una arista $e \in E(G)$, denotado por $L(e)$. Es decir, para cada arista se especifica un conjunto de colores entre los cuales deberá elegirse su color. La colección de todas estas listas constituye una asignación de listas.

Definición: 15 (L -arista-coloreo). Sea L una asignación de listas sobre las aristas de un grafo G . Un L -arista-coloreo es una coloración (propia) de las aristas de G en la que cada arista recibe un color perteneciente a su lista $L(e)$. En otras palabras, cada arista se colorea utilizando únicamente uno de los colores permitidos por su lista, y además dos aristas incidentes deben recibir colores distintos.

Bibliografía

- [BFL⁺25] Fábio Botler, Cristina G. Fernandes, Carla N. Lintzmayer, Rui A. Lopes, Suchismita Mishra, Bruno L. Netto, and Maycon Sambinelli. Immersions of large cliques in graphs with independence number 2 and bounded maximum degree. *arXiv preprint arXiv:2506.09768*, 2025. [9](#)
- [BKW97] O. V. Borodin, A. V. Kostochka, and D. R. Woodall. List edge and list total colourings of multigraphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 71(2):190, 1997. [13](#)
- [CS12] Maria Chudnovsky and Paul Seymour. Packing seagulls. *Combinatorica*, 32:251–282, 2012. [13](#)
- [GLW19] Gregory Gauthier, Tien-Nam Le, and Paul Wollan. Forcing clique immerisions through chromatic number. *European Journal of Combinatorics*, 2019. [10](#)
- [Had43] Hugo Hadwiger. Über eine klassifikation der streckenkomplexe. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 88:133–142, 1943. [6](#)
- [LM89] François Lescure and Henry Meyniel. On a problem upon configurations contained in graphs with given chromatic number. In *Annals of Discrete Mathematics*, volume 41, pages 325–331. Elsevier, 1989. [8](#)
- [Myc55] Jan Mycielski. Sur le coloriage des graphes. *Colloquium Mathematicum*, 3:11, 1955. [5](#)
- [PST03] Michael D. Plummer, Michael Stiebitz, and Bjarne Toft. On a special case of hadwiger’s conjecture. *Discussiones Mathematicae*, 2003. [6](#)
- [Qui21] Daniel A. Quiroz. Clique immersions in graphs of independence number two with certain forbidden subgraphs. *Discrete Mathematics*, 2021. [8](#)
- [Ram30] Frank P. Ramsey. On a problem of formal logic. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 30(1):264–286, 1930. [16](#)
- [RS10] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors xxiii. nash-williams’ immersion conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 100(2):181–205, 2010. [7](#)
- [Sey16] Paul Seymour. Hadwiger’s conjecture. In Jr. Nash, John Forbes and Michael Th. Rassias, editors, *Open Problems in Mathematics*, pages 417–437. Springer, Cham, 2016. [6](#)
- [Ver17] Sylvia Vergara. Complete graph immersions in dense graphs. *Discrete Mathematics*, 340(5):1019–1027, 2017. [8](#), [13](#)
- [Wag37] Klaus Wagner. Über eine eigenschaft der ebenen komplexe. *Mathematische Annalen*, 114(1):570–590, 1937. [5](#)