



UNIVERSIDAD DE VALPARAÍSO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**DISEÑO DE UN JUEGO EDUCACIONAL COMO PROPUESTA METODOLOGICA
PARA LA ENSEÑANZA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES DE 2X2 EN
NIVEL MEDIO 2 CON LA AYUDA DE METÁFORAS.**

Memoria presentada por:

Manuel Cuevas León

Angélica Fernández Cavada

Cuevas León opta al Título de Profesor de Educación Media en Matemática con Mención

Computación

Fernández Cavada opta al Título de Profesor de Educación Media en Matemática con Mención

Didáctica

Profesor Guía: Jairo Alfredo Navarrete

Valparaíso 2012

INDICE

AGRADECIMIENTOS	v
LISTA DE TABLAS	vii
LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE GRÁFICOS	viii
Capítulo I	
1. Introducción	1
Capítulo II	
2. Objetivos	7
2.1 Objetivo General	7
2.2 Objetivo Específico	7
Capítulo III	
3. Antecedentes	9
3.1 Historia de la Metáfora	9
3.2 Autores que hablan de Metáfora	9
Capítulo IV	
4. Marco Teórico	11
4.1. Tipo de Metáforas.	11
4.1.1. Metáforas Orientacionales	11
4.1.2. Metáforas Ontológicas	12
4.1.3. Metáforas Estructurales	12
4.2. Didácticas de la matemática	13
4.3. Juego educativos	16
4.3.1. Aprendizaje a través del Juego Educativo	16
4.3.2. Ventajas de los juegos Educativos	17
4.3.3. Competencia en el juego educativo	18
4.4. Geometría analítica plana	20
4.4.1. Plano Cartesiano o Sistemas de coordenadas Cartesianas	20
4.4.2. La pendiente	21

4.4.3. Rectas y segmentos de rectas	22
4.4.4. Coeficiente de Posición	23
4.4.5. Definición de rectas Paralelas	24
4.4.6. Definición de rectas perpendiculares	25
4.4.7. Sistema de ecuaciones en el Plano Cartesiano	26
4.5. Álgebra Lineal	27
4.5.1. Sistema de Ecuaciones Lineales	27
4.5.2. Sistema de ecuaciones lineales de 2x2	28
4.6. Método Analítico	31
4.6.1. Método de Sustitución	31
4.6.2. Método de Igualación	32
4.6.3. Método de Reducción	33
4.6.4. Regla de Cramer	35
Capítulo V	
5. Metodología	36
5.1. Creación preliminar del juego	36
5.2. Creación del juego final	37
5.2.1. Ubicación en el plano cartesiano	38
5.2.2. Lanzamiento de proyectiles	40
5.2.3. Intersección de rectas	43
5.3. Secuencia de aprendizaje como modelo de enseñanza	46
Capítulo VI	
6. Resultados	54
Capítulo VII	
7. Discusión y Conclusiones	59
Capítulo VIII	
8. Referencias Bibliográficas	61
8.1. Bibliografía	61
8.2. Linkografía	64

Capitulo IX

9. Anexos	65
9.1. Anexo n°1	65
9.2. Anexo n°2	66
9.3. Anexo n°3	76
9.4. Anexo n°4	77

AGRADECIMIENTOS

Al llegar a esta etapa tan trascendental en la historia de mi vida, contemplo como todo fue conduciéndome paulatinamente a lograr este desafío que asumí. Por eso, en estos párrafos, unos de los más especiales, tengo la oportunidad de expresar el agradecimiento que siento por esas personas que me ayudaron en esta etapa, tanto en mi formación personal como académica.

Primero que todo a mí querida familia que con su apoyo incondicional, confiaron en mis capacidades para sacar adelante esta carrera y me apoyaron en todas mis locuras.

Agradecer a todos los amigos que me acompañaron en este recorrido tanto a los que fueron quedando como a los que aún están conmigo. A ustedes los llevare siempre en la memoria.

A ustedes, mi pequeñita familia, Elizabeth y Renato, gracias por su apoyo incondicional en esta mi ultima etapa para ser un profesional....

Y como no agradecer a esos dos grandes funcionarios, Gerardo y Adolfo, por su apoyo, ayuda y buena disposición en todo.

Manuel..... ¡Gracias Totales!

Al finalizar un ciclo tan importante y fundamental en mi vida que si bien ha requerido de esfuerzo y mucha dedicación, no hubiera sido posible sin la ayuda de muchos sin la cooperación desinteresada, ayuda incondicional, apoyo constante en todo momento, por entregarme la fortaleza que muchas veces necesite, es por esto y mucho más que les agradezco....

Primero que nada Gracias a Dios por estar conmigo, y poner en mi camino a personas tan importantes en mi vida, las que han sido mi compañía y soporte durante todo el periodo de estudio.

Agradezco a mi abuelita, primo, mis tíos, mis hermanos, personas que en todo momento sentí su apoyo incondicional, fuerza necesaria para seguir adelante.

A Christian por ser la persona quien ha compartido todo este tiempo a mi lado, porque con su compañía las cosas malas se convertían en buenas, la tristezas en alegría, me entregaba confort cuando más lo necesitaba, por tenerme la paciencia para soportarme durante todos estos años.

A mis papás que sin su cariño, comprensión, ayuda, nada de esto podría haber sido posible. Por creer siempre en mí, y por entregarme la confianza para continuar con el propósito que me había planteado.

... a todos ellos y a muchos que no nombre...

Angélica

... ¡Gracias Totales!

LISTA DE TABLAS

Tabla 1. Características de cómo los videojuegos contribuyen a la adquisición de aprendizaje de los usuarios.	3
Tabla 2. Descripción de niveles de desempeño en la escala de Matemática.	5

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Plano Cartesiano	21
Figura 2: Pendiente	22
Figura 3: Exactamente una solución	29
Figura 4: Exactamente sin solución	30
Figura 5: Exactamente con una infinidad de soluciones	30
Figura 6: Mapa, Dado y Moneda de ejes.	38
Figura 7: Lanzamiento de Proyectoil	40
Figura 8: Intersección de recta	43
Figura 9: Recta paralela al eje Y	67
Figura 10: Recta paralela al eje X	68
Figura 11: Recta con inclinación	69
Figura 12: Impacto en la barrera de coral	71
Figura 13: Transportador Mágico	72
Figura 14: Liga	73
Figura 15: Uso de liga	74
Figura 16: Cartilla de Rectas	75
Figura 17: Tarjetas esponjas destino	76

LISTA DE GRAFICOS

Gráfico n°1: Aprendizaje Significativo	55
Gráfico n°2: Innovación Pedagógica	56
Gráfico n°3: Actitud frente al Aprendizaje	57
Gráfico n°4: Estructura del Juego	58

CAPITULO I

*“Da el primer paso con fe, no tienes que
ver toda la escalera, tan solo da el
primer paso.”*
Martin Luther King Jr

INTRODUCCIÓN

En los últimos tiempos el ministerio de educación (MINEDUC) en conjunto con investigadores y la sociedad chilena, ha estado incrementando los esfuerzos por mejorar la educación¹, tratando de hacer un cambio en ésta mediante diferentes métodos o metodologías. Una de las nuevas estrategias que se está implementando, es el enseñar con la ayuda de juegos ya sea de tableros, de competencias, de estrategia, cooperación o videojuegos que son basados en el concepto de metáforas, las que serán utilizadas como una herramienta por el docente.

Según la Real Academia Española (RAE), una metáfora es la *“Aplicación de una palabra o de una expresión a un objeto o a un concepto, al cual no denota literalmente, con el fin de sugerir una comparación (con otro objeto o concepto) y facilitar su comprensión”*². Según Lakoff, G. & Johnson, M. (1980) *“Las metáforas constituyen uno de los mecanismos conceptuales fundamentales por medio del cual representamos el mundo y lo expresamos en relativa concordancia con la manera como la experimentamos”*.

Según Mainer B. (2006) lo que se busca con los juegos educativos es la entrega de apoyo a la enseñanza y no es remplazar al profesor, sino más bien entregarle una herramienta, en donde los

¹Véase en <http://w3app.mineduc.cl/DedPublico/Inicio>

² Véase en <http://www.rae.es/rae.html>

jugadores descubran por instintos los resultados sin darse cuenta de que están aprendiendo. Es por este motivo que hace algunas décadas nace una nueva tendencia de aprendizaje que es llamado *edutainment* que tiene por objetivo referirse al aprendizaje adquirido a través de una determinada actividad lúdica (Mainer B, 2006).

Aunque los objetivos que persigue un juego normal y un juego educativo son diferentes, la característica fundamental de ambos debe seguir siendo la de entretener a los jugadores, por tanto debe tenerse en mente siempre que el juego debe ser divertido a la par que persiga los objetivos educacionales por el cual fue construido. Los aprendizajes que se pueden obtener a través de estos tipos juegos son: resolución de problemas, aprendizaje de soluciones, razonamiento deductivo y memorización. Además de experiencia en trabajo en grupo, de tipo cooperativo o colaborativo, y aprendizaje basado en las resoluciones de tareas Angela, Anne *et al* (2002).

Los juegos de tableros, de estrategia como también los videojuegos deben entregar aprendizajes significativos para el alumno, es decir, donde el estudiante sea capaz de relacionar la información nueva con la ya poseída reajustando y reconstruyendo ambas informaciones. De esta manera Attewell & Savill-Smith (2003) describen una serie de valores que adquieren los alumnos al momento de introducirse en este tipo de juegos educativos, lo que se resume en la tabla 1.

TABLA 1 “Características de cómo los videojuegos contribuyen a la adquisición de aprendizaje de los usuarios”

Características del juego	Valores adquiridos
Diversión	Satisfacción
Jugar	Inmersión
Normas y reglas	Estructura
Metas y objetivos	Motivación
Interacción con el juego	Saber hacer
Reciprocidad	Aprendizaje con respuesta inmediata
Adaptación	Carácter abierto
Ganar la partida	Gratificación del ego, auto-superación
Competitividad, obstáculos	Adrenalina
Resolver problemas	Fomento de la creatividad
Interacción social	Aprendizaje social
Narratividad	Emociones

(Attewell & Savill-Smith, 2003)

Para poder aprovechar al máximo estos valores la planificación del profesor tiene que estar bien estructurada, para comprender desde la anticipación de conocimiento de los alumnos, su formulación de objetivos, activación de conocimientos previos para construir nuevos aprendizajes (Mainer B.2006). Donde el profesor ha de ser un guía y acompañante del alumno por lo que debe estar preparado y formado en las nuevas tecnologías.

Lo que se busca es que el jugador se involucre con un sistema que permita introducirse en un mundo donde se estará familiarizando con un lenguaje y un contenido determinado, para adquirir de esta forma el uso de ciertas habilidades, decisiones dentro del juego que sean cruciales para el objetivo educacional para el cual fue creado este instrumento de aprendizaje.

Al crear un juego educacional lo que se busca es que los jugadores se entretengan para que estos jueguen la mayor cantidad de tiempo una y otra vez, sin dejar de lado el objetivo educacional³ al cual está ligado. Para ello, en el momento de la creación se tienen que tomar ciertas medidas diferentes a las de un juego común; como por ejemplo: identificación del contenido crítico y público al cual estará dirigido. Cuando nos referimos al contenido crítico nos enfocamos en la búsqueda del tema, como por ejemplo ¿Cuáles son los contenidos más complejos de aprender?, ¿en qué unidad el rendimiento es insuficiente?, ¿qué unidad intervenir para que el alumno acceda a mejores resultados?

Una vez identificado el tema, investigamos si corresponde al área con mayor complejidad de ser comprendida por los alumnos, para esto nos basaremos en los resultados del Sistema de Medición de la Calidad de la Educación (SIMCE) y PISA⁴.

Según el informe **PISA** el 22% de los estudiantes chilenos se ubica bajo el nivel 1 que puede ser descrito en Matemáticas (ver tabla 2), y por tanto, no domina siquiera las competencias elementales y tan solo el 1% está en los niveles más avanzados de las competencias.

³ Logro que el alumno debe alcanzar al finalizar un proceso educativo como resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje intencionalmente planificadas a tal fin.

⁴ Que sus siglas en inglés (Programme for International Student Assessment) se basa en el análisis del rendimiento de estudiantes a partir de unos exámenes mundiales que se realizan cada tres años y que tienen como fin la valoración internacional de los alumnos.

TABLA 2 “Descripción de niveles de desempeño en la escala de Matemática”

Nivel 6 (670 y más puntos)
Los estudiantes ubicados en este nivel, son capaces de conceptualizar, generalizar y usar información basada en sus investigaciones y en el modelamiento de situaciones problemáticas complejas. Pueden relacionar diferentes fuentes de información y representaciones y hacer traducciones entre ellas de manera flexible. Poseen un razonamiento y pensamiento matemático avanzado, y pueden aplicarlo, junto con el dominio de las operaciones y relaciones matemáticas simbólicas y formales, en el desarrollo de nuevas aproximaciones y estrategias para enfrentar situaciones novedosas. Asimismo, son capaces de formular y comunicar con precisión las acciones y reflexiones que les surgen de sus descubrimientos, interpretaciones y argumentos, y de adecuarlas a situaciones distintas de las originales.
Nivel 5 (de 607 a 669 puntos)
Los estudiantes ubicados en el Nivel 5, son capaces de abordar situaciones complejas, desarrollando y utilizando modelos, identificando sus limitaciones y especificando sus supuestos. Adicionalmente, son capaces de seleccionar, comparar y evaluar estrategias de resolución de problemas, para abordar situaciones problemáticas complejas referidas a estos modelos. Estos estudiantes también son capaces de trabajar de manera estratégica estas situaciones, usando habilidades de pensamiento y razonamiento amplias y correctamente desarrolladas; representaciones adecuadamente vinculadas, y caracterizaciones simbólicas y formales. Finalmente, también son capaces de reflexionar sobre sus acciones, y de formular y comunicar sus interpretaciones y razonamientos.
Nivel 4 (de 545 a 606 puntos)
Los estudiantes ubicados en el Nivel 4, son capaces de trabajar de manera eficiente con modelos explícitos de situaciones complejas concretas, que involucran condicionantes o la necesidad de reconocer supuestos. Pueden seleccionar e integrar diferentes representaciones (incluyendo las simbólicas), relacionándolas directamente con situaciones del mundo real. Asimismo, poseen la habilidad de razonar flexiblemente y de lograr cierta profundización de los contextos, y pueden elaborar y comunicar sus explicaciones y razonamientos, sobre la base de sus propias interpretaciones, argumentos y acciones.
Nivel 3 (de 482 a 544 puntos)
Los estudiantes ubicados en el Nivel 3 de la escala, son capaces de ejecutar procedimientos claramente descritos (incluyendo los que requieren decisiones secuenciales); de seleccionar y aplicar estrategias simples de resolución de problemas; de interpretar, y de usar representaciones basadas en diferentes fuentes de información y razonar directamente a partir de ellas. Asimismo, son capaces de elaborar comunicaciones breves para reportar sus interpretaciones, resultados y razonamientos.
Nivel 2 (de 420 a 481 puntos)
Los estudiantes que se ubican en este Nivel, son capaces de interpretar y reconocer situaciones en contextos que requieren solo inferencia directa, extraer información relevante de solo una fuente de información a la vez y hacer uso de una sola forma de representación. Pueden utilizar algoritmos, fórmulas, procedimientos o convenciones básicas, son capaces de razonar directamente y de hacer interpretaciones literales de los resultados.
Nivel 1 (de 358 a 419 puntos)
Los estudiantes que se ubican en este Nivel, pueden responder preguntas claramente definidas, que involucren contextos familiares, en los cuales toda la información relevante está presente. También son capaces de identificar información y de llevar a cabo procedimientos rutinarios, siguiendo instrucciones directas, en situaciones explícitas. Finalmente, estos estudiantes pueden realizar acciones obvias o aquellas que se desprenden directamente de los estímulos presentados.

Fuente: PISA 2009, OCDE

Dado que el contenido crítico ya señalado es abordado en la tercera unidad del Nivel Medio 2 (NM2), el público objetivo será precisamente alumnos de 2° medio que se encuentran en un rango de edad 15 a 17 años.

Identificado los contenidos críticos y el público al que se le está confeccionando el juego, teniendo siempre presente que uno de los objetivos debe ser el entretener al jugador para captar su atención. De lo contrario, el juego no será aprovechado para un mayor aprendizaje⁵.

Al mismo tiempo se confecciona una idea del perfil del jugador, donde hay que considerar su edad, sus intereses, sus juegos más habituales, los elementos que le gustaría ver en un juego; entre otras consideraciones que se tuvieron presente al momento de la confección del juego

Teniendo en cuenta lo señalado anteriormente, se ha decidido **crear un juego para enseñar sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con la ayuda de metáforas**, para alcanzar los objetivos planteados en la unidad de sistemas de ecuaciones lineales.

De acuerdo a lo descrito anteriormente, este trabajo se centra en el diseño, aplicación, análisis y evaluación de una propuesta de enseñanza que toma en cuenta aspectos importantes para el aprendizaje de **Sistema de Ecuaciones lineales de 2x2**, con la que se pretende abarcar contenidos tales como: ecuaciones lineales con dos incógnitas, sistemas de ecuaciones lineales, ubicación de puntos en el plano cartesiano y encontrar la solución del sistema de ecuaciones mediante la utilización de rectas en el plano cartesiano.

⁵ Es el proceso a través del cual se adquieren nuevas habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación.

CAPITULO II

*“La imaginación lo es todo. Es la vista
previa de lo que la vida va a atraer.”*
Albert Einstein

2. OBJETIVOS

En este capítulo identificamos nuestra meta (objetivo general) que es lo que queremos lograr y la metodología utilizada para lograrla o los procesos realizados para lograr finalmente nuestra meta (objetivos específicos).

2.1. OBJETIVO GENERAL

El objetivo de esta tesis es crear un juego educacional basado en metáforas dirigido a estudiantes de NM2 que sirva como una herramienta para la enseñanza de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 .

2.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Entre los objetivos específicos se encontrara:

- Desarrollar un mecanismo para la asociación de dos registros de representación: gráfica y algebraica.
- Ligar la experiencia del juego de los estudiantes con el contenido de sistemas de ecuaciones lineales de 2×2 .
- Representar de forma lúdica el concepto de una ecuación lineal mediante una recta en el plano cartesiano.

- Evaluar el juego, con alumnos que se encuentren cursando 2° año medio, en dos establecimientos.

CAPITULO III

*“Sigue tu dicha y el universo te abrirá puertas
donde antes sólo hubieron muros.”*
Joseph Campbell

3. ANTECEDENTES

3.1. HISTORIA DE LA METÁFORA

En este trabajo asumimos la interpretación de la metáfora como la comprensión de un dominio en términos de otro. Creando un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada (Arias, 2006).

Para encontrar esta definición nos hemos basado en distintos autores (Lakoff, G. & Johnson, M., Núñez, Edwards, Jorge Acevedo, entre otros) que hablan de este concepto, en distintos ámbitos dentro de los cuales nos centraremos en la metáfora como ente educacional que nos ayudará en la creación de este juego educativo.

3.2. AUTORES QUE HABLAN DE LA METÁFORA

Son muchos los autores que se encuentran trabajando con este concepto como herramienta educativa. Lakoff y Johnson, (1980) definen la metáfora como la comprensión de un dominio en términos de otro, de acuerdo a esto la interpretación de la metáfora como un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que nos permite proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada. Otro de los significados que le han asignado a este término es la

de conectar diferentes sentidos y, por lo tanto, ampliar el significado que tiene para una persona un determinado objeto matemático (Abrate *et al*, 2006).

La importancia del pensamiento metafórico⁶ en la construcción del significado de los objetos matemáticos, se reconoce en los investigadores de la didáctica de la matemática, y es origen de una de las teorías sobre el origen de las matemáticas propuesta por Lakoff y Núñez (2000). Estos dos autores señalan a grandes rangos que el pensamiento metafórico es importante para la construcción de las matemáticas. Nos entrega una idea más clara de algún concepto que no fue comprendido mediante definiciones formales, donde la metáfora proporciona un puente entre lo conocido y lo por conocer.

Lakoff y Johnson (1980 p. 39) señalan que la metáfora constituye uno de los mecanismos conceptuales fundamentales por medio del cual representamos el mundo y lo expresamos en relativa concordancia con la manera como lo experimentamos. Lo que dependerá de como cada ser humano represente este mundo, será la variación de las interpretaciones que se puedan tener de algún contenido en particular. La mayor parte de los seres humanos conceptualizamos cosas abstractas en términos de cosas concretas, para hacernos una idea de algún concepto o término no conocido basándonos en esta idea construiremos un juego educacional que, como herramienta educativa, esperamos sirva de ayuda a la enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales de dos por dos.

⁶Pensamiento metafórico: Es la capacidad para establecer conexiones entre dos cosas diferentes reconociendo que en cierto modo comparten un rasgo común o ejemplifican un principio común (De Bono, 1993).

CAPITULO IV

*“Tanto si piensas que puedes o no puedes,
de cualquier forma estás en lo cierto.”*
Henry Ford

4. MARCO TEORICO

En este capítulo presentaremos los fundamentos teóricos de este trabajo. Como base para la creación de este juego educacional utilizaremos los planes y programas del Ministerio de Educación, para los sistemas de ecuaciones lineales de dos por dos. Este juego será creado en base al concepto de metáfora. Utilizaremos bibliografía de autores que han trabajado con este concepto, algunos investigadores de la didáctica, autores que validan la creación de juegos o uso de tecnología en el aula de trabajo.

4.1. TIPOS DE METÁFORAS

Siendo la metáfora un concepto que parece un tanto alejado de lo cotidiano, a partir de los tres tipos distintos de estructuras metafóricas señaladas por Acevedo (2008), se puede observar que su utilización ya esta presente incluso en las interacciones al interior del aula.

4.1.1. Metáforas Orientacionales

Estas metáforas tienen relación con orientación espacial como dentro/fuera, adelante/atrás, profundo/superficial, entre otras.

Como por ejemplo, estatus alto, estatus bajo; lo bueno es arriba, lo malo es abajo. En matemática sería cuando el profesor utiliza el término eje horizontal en vez de decir eje de las abscisas.

4.1.2. Metáforas Ontológicas

Se caracteriza por un fenómeno peculiar, mediante su consideración como una entidad, una sustancia, un recipiente, una persona, etcétera. Siempre que un concepto absolutamente abstracto es personificado por la metáfora ontológica se consideran descripciones directas sin darnos cuenta que estamos utilizando una. Como por ejemplo, no me entran las matemáticas; te va a salir humo por la cabeza; ponte las pilas.

4.1.3. Metáforas Estructurales

En las que una experiencia o una actividad se estructuran en términos de otra. Como por ejemplo, discutir es una guerra; comprender es ver.

El lenguaje habitual que utilizamos para conversar está sometido a la utilización de metáforas. Sin darnos cuenta estamos estructurando nuestras frases en términos de algo más conocido o algo más popular. En consecuencia estaríamos frente a dos tipos de lenguaje, el lenguaje formal y el lenguaje metafórico, ciertamente este último es más utilizado en cualquier contexto, en una reunión de amigos, conversación de familia e incluso en una clase de matemática, donde el lenguaje formal sería una dificultad aún más para comprender los contenidos que se están introduciendo.

Por otro lado Lakoff y Núñez (2000), distingue dos tipos de metáforas conceptuales:

- Grounding Metáforas (conectadas a la tierra, fundada): Son las que tienen su dominio de llegada en las matemáticas, pero su dominio de partida fuera de ellas. De esta forma se facilita la comprensión de algún concepto para el alumno ya que estos utilizarán lo que ya conocen para comprender algún saber matemático. Por ejemplo, “los puntos son objetos”, “las clases son contenedoras”, “restar es quitar, eliminar, sacar”.
- Linking Metáforas (de enlace): son las que tiene su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas, relaciona ideas matemáticas sobre otras distintas a ellas. Por ejemplo, “los números reales son los puntos de una recta”, “las funciones de proporcionalidad directa son rectas que pasan por el origen de coordenadas”.

4.2. DIDÁCTICAS DE LA MATEMÁTICA

“La abundancia de fracasos en el aprendizaje de las matemáticas, en diversas edades y niveles educativos, puede ser explicada, en buena parte, por la aparición de actitudes negativas causadas por diversos factores personales y ambientales, cuya detección sería el primer paso para tratar de contrarrestar su influencia con efectividad. En estos últimos años, la importancia de la dimensión afectiva en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática está adquiriendo relevancia creciente siendo este uno de los temas prioritarios de investigación en didáctica de las matemáticas” (Gómez, Chacón, 1997, citado por Díaz, 2004).

Lo que busca la Didáctica de las Matemáticas es favorecer y optimizar el aprendizaje por parte de los alumnos de los contenidos de la enseñanza de las matemáticas. Uno de los propulsores de esta técnica es Guy Brousseau, que busca el aprendizaje de una mirada constructivista, en donde el aprendizaje debe producirse por sí mismo y el maestro solo debe estar en su rol de guía para el alumno.

De esta forma nace la idea de constructivismo que según Mario Carretero (1997, p 21) argumenta lo siguiente:

"Básicamente puede decirse que es la idea que mantiene que el individuo, tanto en los aspectos cognitivos y sociales del comportamiento como en los afectivos, no es un mero producto del ambiente ni un simple resultado de sus disposiciones internas, sino una construcción propia que se va produciendo día con día como resultado de la interacción entre esos dos factores. En consecuencia, según la posesión del constructivismo, el conocimiento no es una copia fiel de la realidad, sino una construcción del ser humano. ¿Con qué instrumentos realiza la persona dicha construcción?, fundamentalmente con los esquemas que ya posee, es decir, con la que ya construyó en su relación con el medio que lo rodea".

De acuerdo a esto, el alumno no tiene que ser mero espectador en su clase sino formar parte de la construcción de su aprendizaje, guiado siempre por el profesor.

Otro de los didactas de las matemáticas es Rayman Duval el que trabaja sobre las representaciones semióticas y su importancia en el aprendizaje, señalando que "las representaciones semióticas,

como conjuntos de signos, son el medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles o comunicarlas a otros individuos” (Duval, 1999) , señalando que las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmulas algebraicas, gráficos, figuras geométricas). A lo que Rayman Duval (1993) señala “no existe conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación”. En el marco del aprendizaje de las matemáticas el cambio de la forma es fundamental pues se observa que, la comprensión que la gran mayoría de los alumnos tiene de un contenido, permanece limitada a la forma de representación utilizada.

Una de las cosas que se busca con este juego educacional es que el alumno relacione al menos dos tipos de registros, algebraico y geométrico, realizando una conversión, es decir, una transformación que hace pasar de un registro a otro, para de esta forma lograr un aprendizaje significativo del alumno.

Según Roberto Araya (2000) existen cuatro principios neurocognitivos-evolucionarios que nos ayudan a como aprender y/o enseñar las matemáticas:

- “Aprovechar oportunísticamente las capacidades naturales del cerebro producidas a través de cientos de millones de años de evolución.
- Enseñar a manejar siempre múltiples representaciones, y de naturalezas distintas: motoras, cinestéticas, visuales, auditivas, verbales, simbólicas, etcétera, y enseñar a conectarlas entre sí (estrategia similar de buscar varios puntos de entrada que recomienda el psicólogo de la educación Howard Gardner).

- Diseñar secuencias de acciones y estímulos que permitan aumentar la frecuencia de selección de estrategias y la creación de nuevas, sin nunca olvidar que las antiguas estarán siempre presente.
- Comenzar por representaciones motoras-cinestéticas y visuales, y luego, poco a poco, introducir representaciones más abstractas”.

4.3. JUEGOS EDUCACIONALES

En las últimas épocas, la creación de estas nuevas tendencias de aprendizaje, llamada edutainment⁷, ha aumentado debido a los logros que se han producido con esta herramienta. Lo que hace la diferencia entre el diseño y desarrollo de un juego normal con el de un proyecto de edutainment, es que el objetivo de un juego normal es entretener a los jugadores, para que estos jueguen la mayor cantidad de tiempo, mientras que el último tiene además objetivos educativos. En este sentido es apropiado hablar de un conjunto de restricciones diferente al de diseñar un juego tradicional, con el fin de buscar una herramienta facilitadora de algún contenido matemático.

4.3.1. Aprendizaje a través del Juego Educativo

“...La situación de juego, proporciona igualmente estimulaciones, variedad, interés, concentración y motivación. Si se añade a esto la oportunidad de ser parte de una experiencia que, aunque muy

⁷ Edutainment: Es la unión entre las palabras “education” y “entertainment”, que significa “instruir jugando”. El término fue acuñado por Bob Heyman, documentalista de National Geographic. Véase: <http://en.wikipedia.org/wiki/Edutainment>

posiblemente sea exigente, no es amedrentador, está libre de presiones irrelevantes y permite a quien participa una interacción significativa dentro de su propio entorno...”(Moyles, 1999; p.22)

En la educación se hace necesario conocer estrategias que sean atractivas, innovadoras, ideas que estimulen la participación del alumno para lograr una buena disposición de estos. Se hace necesario innovar en la enseñanza, la técnica de los juegos permite desarrollar una comprensión entretenida de los contenidos. Por esta razón los juegos pueden ser útiles como introducción a algún contenido matemático, debido a que el juego facilitará la motivación de los jugadores, propiciando un interés por las matemáticas, el desarrollo de la creatividad y habilidades para resolver problemas.

“El juego representativo en la escuela constituye un medio educativo y didáctico, necesario por razones pedagógicas, psicológicas y también metódicas-didácticas, por lo que ya debería ser incluido en los planes de enseñanza del grado primario. La motivación pedagógica está basada en la necesidad del orden que condiciona la forma del juego, y a la vez en la exigencia de concentración” (Wolfgang, 1993; p.123).

4.3.2. Ventajas de los juegos educativos

La utilización de estas técnicas en el aula desarrollan ciertas ventajas para los alumnos, de acuerdo a esto Caneo, M. (1987) plantea las siguientes:

- Permiten la socialización.
- Rompe con la rutina, deja de lado la enseñanza tradicional, la que es muy monótona.
- Aumenta la disposición al aprendizaje en los alumnos.

- En lo intelectual, fomenta la observación, atención, capacidades lógicas, la fantasía, imaginación, la investigación científica, conocimientos, habilidades, potencia creadora, entre otras.
- En lo afectivo – motivacional propicia el interés, gusto por la actividad, espíritu de solidaridad, dar y recibir ayuda.
- En la conducta desarrolla el espíritu crítico y de autocrítica, la iniciativa, la disciplina, el respeto, la audacia, la puntualidad, el compañerismo, la cooperación y seguridad en sí mismo.

De acuerdo a todas estas características el juego es más que una herramienta para los alumnos, ya que sus aportes son muchos y muy enriquecedores para el proceso enseñanza-aprendizaje.

4.3.3. Competencia en el juego educacional

La palabra competencia deriva del latín “competentia” tiene relación a disputa de dos o más personas sobre algo o una rivalidad para obtener alguna cosa. Se puede competir con los demás o con uno mismo superándose cada vez. De acuerdo a esto la competencia es un innato impulso a la superación, siempre apoyada por valores morales, beneficiando no solamente al individuo o grupo sino también a la institución que pudiera pertenecer. Una adecuada competencia favorece la madurez física y emocional de los niños. Al competir desarrollando habilidades físicas y psicológicas, para poder tener éxito en la vida adulta (Garzarelli, 2002).

Según Araya (2012) el competir por equipos y la cooperación entre pares lograría un aprendizaje mucho más atractivo y aplicado a la vida cotidiana que cuando es individual. Esto se traduce en la inversión de más tiempo y energía por parte de los estudiantes para buscar formas de mejorar. Asimismo la competencia contra otros es por si una gran fuente de motivación. El desafío es promover la cooperación entre pares y el aprendizaje mutuo. Además, los juegos masivos tienen más posibilidades de crear un ambiente favorable para que los estudiantes dediquen tiempo y energía en el análisis matemático.

4.4. GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

La geometría analítica se basa en el trabajo de René Descartes y Pierre de Fermat quienes han trabajado en diversos campos de la matemática como la geometría y la estadística entre otros.

La geometría se puede subdividir en tres ramas, la geometría proyectiva (proyecciones de las figuras sobre un plano); la geometría del espacio (figuras cuyos puntos no pertenecen todos al mismo plano); y la geometría plana (figuras cuyos puntos están todos en un plano). De esta última es la que trataremos a continuación.

4.4.1. Plano Cartesiano o Sistemas de coordenadas Cartesianas

El sistema de coordenadas cartesianas es el conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, se puede visualizar mediante una unidad lineal para la medida de longitudes y por dos ejes, perpendiculares entre sí, numerados en un orden determinado. El punto de intersección de los ejes se llama “origen de coordenadas”; además el primero de ellos se llama eje de abscisas y, el segundo, eje de ordenadas. Estos ejes coordenados dividen a un plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes numerados tal como se indica en la **figura 1**. La dirección positiva del eje X es hacia la derecha; la dirección positiva del eje Y, hacia arriba (Lehmann, 1989).

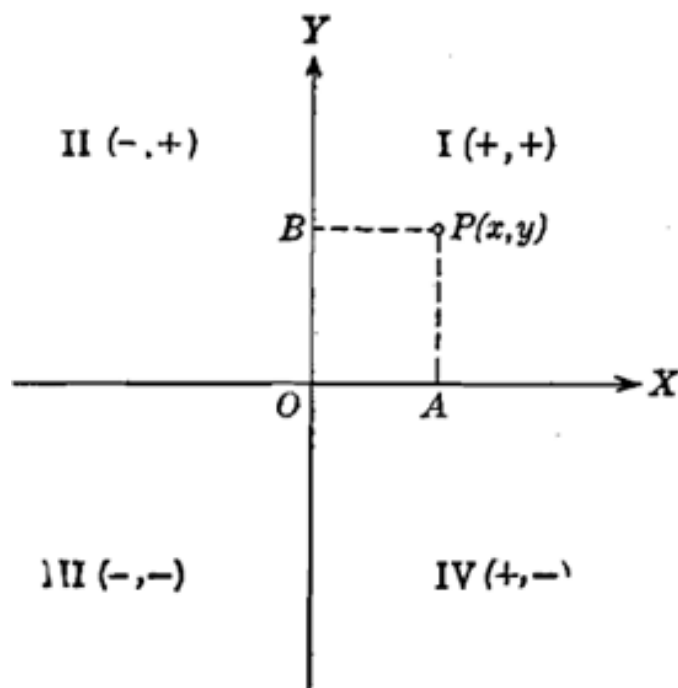


Figura 1: Plano Cartesiano.

La representación de un punto en el plano está dada por un par de números $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ para lo que anotamos $P(x, y)$ donde “x” es el eje de las abscisas e “y” es el eje de las ordenadas del punto P , como también se puede señalar que “x” e “y” son las coordenadas de P , de esa forma se conforma el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ o el plano $\mathbb{R}^2$.

4.4.2. La pendiente

Según De las Heras, *et al.* (1993) se denomina pendiente (m) de una recta al grado de inclinación (α) que tiene respecto al del eje de la abscisas.

Dada la recta determinada por los puntos A y B, coordenadas $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, podremos calcular su pendiente (m) mediante la expresión:

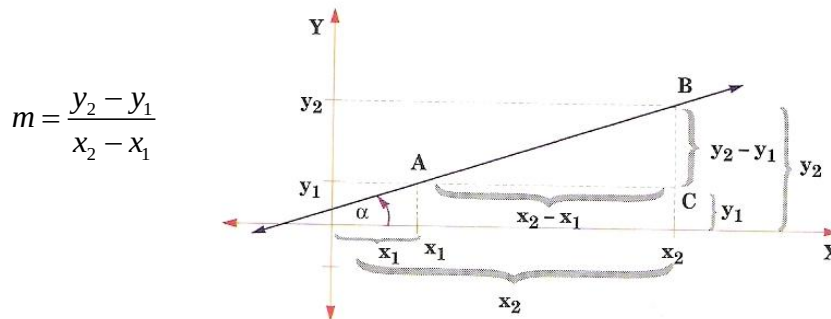


Figura 2: Pendiente

Además la pendiente cumple con 4 condiciones las cuales se describen a continuación:

1. Si la $m > 0$, la recta es creciente, es decir, de izquierda a derecha.
2. Si la $m < 0$, la recta es decreciente, es decir, de derecha a izquierda.
3. Si la $m = 0$, la recta será paralela al eje x, por lo que el ángulo de inclinación es nulo.
4. Si la pendiente es infinita, la recta es paralela al eje y, la gráfica será vertical.

4.4.3. Rectas y segmentos de rectas

En la geometría plana se define una recta como una sucesión infinita de puntos (pares ordenados (x, y)) situados en una misma dirección, y un segmento con un fragmento de recta que esta comprendido entre dos punto llamados extremos (Lehmann, 1989). Este conjunto de pares ordenados (x, y) forma la ecuación lineal, cuya forma cartesiana ordinaria es:

$$Ax + By + C = 0,$$

donde A o B es diferente de 0.

Si trabajamos la ecuación general de la recta despejando la incógnita “y” obtendremos:

$$y = -\frac{A}{B}x + \left(-\frac{C}{B}\right),$$

Donde, por notación llamaremos $-\frac{A}{B} = m$ y $-\frac{C}{B} = b$, es decir la ecuación nos queda $y = mx + b$,

donde x e y son variables en el plano, m es la pendiente de la recta y b es denominado termino independiente u ordenada al origen y es el valor del punto en el cual la recta corta al eje vertical en el plano (Lehmann, 1989).

En este trabajo presentaremos la ecuación de la recta como $y - y_1 = m(x - x_1)$ la cual es una forma más intuitiva, en donde la expresión describe m como la pendiente y que pasa por un punto del plano de coordenadas (x_1, y_1) (De las Heras, *et al.*, 1993).

4.4.4. Coeficiente de Posición

Algebraicamente, el coeficiente de posición es el término independiente, es el número asociado a la intersección de la recta con respecto al eje de las ordenadas (eje vertical) $-\frac{C}{B}$. Si B es igual a cero la recta no intersecta al eje de las ordenadas.

La simbología utilizada para el coeficiente de posición es b .

De esta forma nos queda algebraicamente la ecuación principal de la recta descrita:

$$y = mx + b$$

De acuerdo a esta definición vamos a definir los puntos pertenecientes de la recta como los pares ordenados que cumplen la siguiente condición.

$$\{(x, mx + b) / x \in \mathbb{R} \}$$

4.4.5. Definición de rectas Paralelas

Dos rectas distintas son paralelas si ambas tienen la misma pendiente, o bien si ambas son verticales.

Supongamos que $l_1 // l_2$ son rectas paralelas siendo $l_1 : A_1x + B_1y = C_1$ y $l_2 : A_2x + B_2y = C_2$ además se tiene $B_1 \neq 0$ y $B_2 \neq 0$ entonces podemos despejar las ecuaciones anteriores.

$$l_1 : y = -\frac{A_1}{B_1}x + \frac{C_1}{B_1}$$

$$l_2 : y = -\frac{A_2}{B_2}x + \frac{C_2}{B_2}$$

De manera que las pendientes de las rectas son

$$m_1 = -\frac{A_1}{B_1} \text{ y } m_2 = -\frac{A_2}{B_2}$$

Como las rectas son paralelas las pendientes son iguales, es decir,

$$m_1 = m_2$$

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$$

El concepto de paralelismo es necesario para determinar si las rectas se intersectan o no, lo que se obtiene por la definición dada. Cuando tenemos un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones y dos incógnitas, podemos determinar si las rectas del sistema se cortan o no, observando sus pendientes y los coeficientes de posición (Lehmann, 1989).

4.4.6. Definición de rectas perpendiculares

La definición está dada a partir del ángulo que se forma, es decir, en rectas paralelas el ángulo que se forma es de 90° .

Sean l_1, l_2 rectas en el plano. l_1, l_2 Son perpendiculares si y solo si cumple uno de los siguientes puntos:

1. Si m_1 y m_2 son las pendientes respectivas, se cumple que.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

2. Una de ellas verticales (la pendiente es indefinida), y la otra es horizontal (pendiente igual a 0)

4.4.7. Sistema de ecuaciones en el Plano Cartesiano

Geométricamente, plantear un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 , es preguntar el lugar o punto del plano donde las rectas se intersectan (en caso que las rectas sean secantes). Se entenderá como solución del sistema el punto de intersección de las rectas $P(x, y)$ que satisface a ambas ecuaciones.

El conjunto solución será:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / a_{1,1}x + b_{1,2}y = c_1, a_{2,1}x + b_{2,2}y = c_2\}$$

En el registro geométrico⁸ se conocen los elementos del sistema como rectas, donde el conjunto S estará formado por el punto donde se intersectan las rectas.

En el registro geométrico⁹ se conoce los elementos del sistema como rectas, donde el conjunto S estará formado por todos los puntos donde se intersectan las rectas.

⁸ Véase en <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/405/40518206.pdf>

⁹ Véase en <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/405/40518206.pdf>

4.5. ALGEBRA LINEAL

4.5.1. Sistema de Ecuaciones Lineales

Una ecuación lineal con las variables $x_1, \dots, x_n$ es una ecuación que puede escribirse de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

donde b y los coeficientes $a_1, \dots, a_n$ son números reales o complejos, generalmente conocidos de antemano. El subíndice n puede ser cualquier entero positivo (Lay, 1999).

Para trabajar con los sistemas de ecuaciones, estamos encontrando un conjunto S solución cuyos elementos cumplirán las condiciones que el sistema plantea con sus ecuaciones.

Como por ejemplo:

$$p(x, y): 5x + 12y = 5 \wedge 2x + 7y = 2$$

El conjunto solución va a estar dado por lo siguiente:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / 5x + 12y = 5 \wedge 2x + 7y = 2\}$$

Cuando planteamos un sistema de ecuaciones, lo que hacemos es plantear una lista de condiciones simultáneas. Estas condiciones están expresadas como ecuaciones con variables.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ es un conjunto de ecuaciones, como por ejemplo:

$$\begin{array}{lcl} \text{Primera ecuación:} & & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \text{Segunda ecuación:} & & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & & \vdots \\ \text{M-ésima ecuación:} & & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Los $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ y x_j son las incógnitas ($i = 1, \dots, m$ y $j = 1, \dots, n$).

Se dice que los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ constituyen una solución del sistema si al remplazar $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$, las m ecuaciones se convierten en igualdades; resolver el sistema es hallar todas sus soluciones.

4.5.2. Sistema de ecuaciones lineales de 2x2

Toda ecuación lineal (de primer grado) con dos incógnitas le corresponde gráficamente una recta. Cada par ordenado (x, y) que satisface esta ecuación, corresponde a las coordenadas de un punto de la recta correspondiente. Estos pares ordenados son soluciones de la ecuación, y los puntos que ellos representan pertenecen a la recta correspondiente.

Un caso particular de un sistema lineal de ecuaciones $m \times n$ sería un sistema lineal de 2×2 , dos ecuaciones con dos incógnitas. Si consideramos dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, se tiene un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2\end{aligned}$$

Resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, es determinar el conjunto de pares ordenados (x, y) de números reales que satisfacen ambas ecuaciones. Este conjunto se denomina conjunto solución del sistema.

En caso que este sistema tenga solución; tendría valores que al remplazar la incógnita cumplen la igualdad. Si interpretamos el sistema de ecuaciones de 2×2 , como 2 rectas en el plano cartesiano obtenemos 3 casos con respecto a las soluciones que tendría este sistema (infinitas o ninguna solución).

1. Las rectas l_1 y l_2 tienen un solo punto en común lo que implica que las rectas son secantes (ver figura 3), es decir, se cortan en un solo punto.

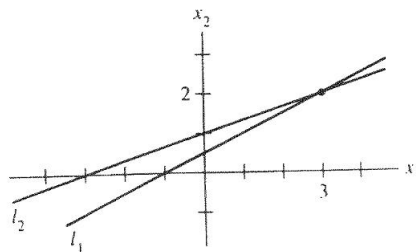


Figura 3: Exactamente una solución

2. Las rectas l_1 y l_2 no tienen puntos en común, lo que implica que las rectas son paralelas (ver figura 4).

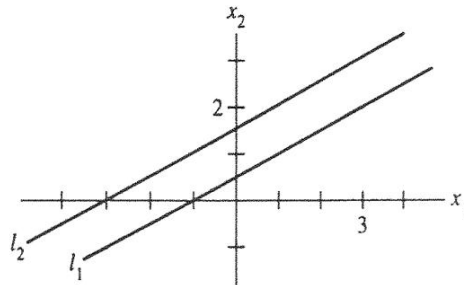


Figura 4: Exactamente sin solución

3. Las rectas l_1 y l_2 tienen infinitos puntos en común, es decir, las rectas son coincidentes (ver figura 5).

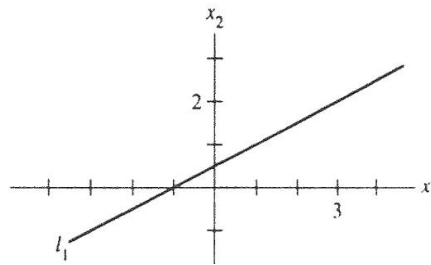


Figura 5: Exactamente con una infinidad de soluciones

De esta forma podemos concluir que si el sistema tiene 2 soluciones, entonces debe tener una infinidad de ellas.

4.6. MÉTODO ANALÍTICO

Los métodos gráficos de resolución de un sistema de ecuaciones lineales presentan inconvenientes en aquellos casos en que la solución no está constituida por números enteros, Afortunadamente, existen otros métodos como por ejemplo el método analítico.

4.6.1. Método de Sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituirlo en la otra, de esta forma obtenemos una ecuación con una sola incógnita. Al obtener el resultado de una de las incógnitas se sustituye su valor en la ecuación despejada, de esta forma obtenemos la segunda incógnita (De las Heras *et al.* 1993).

Ejemplo:

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l|l} 2x - y = 4 & \dots^* \\ \hline 3x + y = 11 & \dots^{**} \end{array}$$

Si elegimos despejar la incógnita “y” en la ecuación **, obtenemos:

$$y = 11 - 3x \quad \dots^{***}$$

Sustituiremos esta expresión en la ecuación *

$$2x - (11 - 3x) = 4$$

$$2x - 11 + 3x = 4$$

$$5x = 15 / \cdot \frac{1}{5}$$

$$\therefore x = 3$$

Ahora remplacemos el valor $x = 3$ en la ecuación *** obtenemos:

$$y = 11 - 3 \cdot 3$$

$$\therefore y = 2$$

Por lo tanto, el conjunto de solución del sistema $S = \{(3, 2)\}$.

4.6.2. Método de Igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones y luego igualar las expresiones resultantes, con el fin de determinar primero el valor de la otra incógnita (De las Heras *et al.* 1993).

Ejemplo:

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l|l} 3x - 2y = 4 & \dots * \\ \hline x + 3y = 5 & \dots ** \end{array}$$

Despejamos la incógnita “x” en ambas ecuaciones, obteniendo:

$$x = \frac{4 + 2y}{3} \dots *$$

$$x = 5 - 3y \dots **$$

Luego, igualamos ambas expresiones

$$\frac{4+2y}{3} = 5-3y \quad / \cdot 3$$

$$4+2y=15-9y$$

$$2y+9y=15-4$$

$$11y=11 \quad / \cdot \frac{1}{11}$$

$$\therefore y=1$$

Ahora remplacemos el valor $y=1$ en la ecuación **

$$x=5-3 \cdot 1$$

$$\therefore x=2$$

Por lo tanto, el conjunto de solución del sistema $S = \{(2,1)\}$.

4.6.3. Método de Reducción

Este método consiste en reducir las dos ecuaciones a una sola, sumándolas.

En algunos casos debemos amplificar convenientemente una o ambas ecuaciones, de modo que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos (De las Heras, *et al.* 1993).

Ejemplo:

Consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{l|l} 3x-11y=5 & \dots * \\ 2x+4y=1 & \dots ** \end{array}$$

Multiplicamos la ecuación * por 4 y la ecuación ** por 11, hacemos opuestos los coeficientes de la incógnita “y”, obteniendo:

$$\begin{array}{l} 3x - 11y = 5 \quad | \cdot 4 \quad \rightarrow \quad 12x - 44y = 20 \\ 2x + 4y = 1 \quad | \cdot 11 \quad \rightarrow \quad + 22x + 44y = 11 \end{array}$$

Luego, sumamos

$$34x = 31$$

$$x = \frac{31}{34}$$

Ahora, remplacemos este valor $x = \frac{31}{34}$ en la ecuación **

$$2 \cdot \frac{31}{34} + 4y = 1 \quad | \cdot 34$$

$$62 + 136y = 34 \quad | -62$$

$$136y = -28 \quad | \cdot \frac{1}{136}$$

$$\therefore y = -\frac{7}{34}$$

Por lo tanto, el conjunto de solución del sistema $S = \left\{ \left(\frac{31}{34}, -\frac{7}{34} \right) \right\}$.

Existen además otros métodos concretos de resolución de sistemas, que no son usados por los profesores de Matemáticas en la enseñanza media como lo es regla de Cramer.

4.6.4. Regla de Cramer:

Según Díaz *et al.* (2003) todo sistema de Cramer¹⁰ tiene solución única que se expresa de la siguiente manera $x_k = \frac{C_k}{|A|}$ (C_k es el valor del determinante de la matriz que resulta al reemplazar en

A su columna k -ésima por el vector columna B de los términos independientes).

Tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \quad \text{determinantes } A = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}$$

Esta regla consiste en que cada incógnita puede expresarse como una cociente de dos determinantes, este se puede aplicar siempre que la matriz de los coeficientes es regular, es decir, determinante de la matriz distinto de cero.

Las soluciones estarían dadas por:

$$x = \frac{\begin{bmatrix} b_1 & a_{1,2} \\ b_2 & a_{2,2} \end{bmatrix}}{\det A} \quad y = \frac{\begin{bmatrix} a_{1,1} & b_1 \\ a_{2,1} & b_2 \end{bmatrix}}{\det A}$$

¹⁰ Un sistema de ecuaciones lineales se define de Cramer si se tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnita y la matriz de los coeficientes es regular, es decir, tiene distinto número de filas y de columnas siendo su dimensión $n \times m$ (Díaz et al. 2003).

5. METODOLOGÍA

5.1. CREACIÓN DEL JUEGO PRELIMINAR

Dado que el contenido crítico ya señalado es abordado en la tercera unidad de NM2, en este caso específico el público objetivo será precisamente alumnos de 2° medio que se encuentran en un rango de edad entre 15 a 17 años.

Tomando en cuenta los antecedentes mencionados, comenzamos con la creación del juego educacional. Uno de los primeros problemas a resolver fue la ubicación de puntos en el plano cartesiano, para ello, en un comienzo se pensó en asociar el plano cartesiano con los puntos cardinales, el elemento conocido facilitaría el aprendizaje. Otro de los problemas que se nos presentó, es hacer que los alumnos asocien la gráfica de una recta con su representación simbólica algebraica, así como también asociar la solución de un sistema de ecuaciones con el punto de intersección de las rectas, en caso que estas sean secantes. Estos fueron algunos de los enigmas a resolver tratando siempre de revisar los beneficios y dificultades que se pudieran tener, buscando la solución más adecuada.

5.2. CREACIÓN DEL JUEGO FINAL

Nuestro objetivo al diseñar y construir este juego (ver anexo 1) es el de introducir el concepto de sistema de ecuaciones lineales de dos por dos, logrando que los estudiantes lo sepan incorporar y manejar adecuadamente, permitiéndoles apropiarse de los sistema de ecuaciones lineales y establecer una base a partir de la cual puedan, si fuese necesario, construir una teoría más rigurosa. En ocasiones puede que los estudiantes sientan un grado de confusión al enfrentarse a un juego de naves que lo que busca es introducir el concepto de ecuaciones lineales.

Para ello se pensó en un juego de competencia, en directa relación con los juegos más vendidos en el mercado¹¹, video juegos, consolas donde la eliminación de los contrincantes está dada por la búsqueda de estrategias de todos los jugadores, para la eliminación de los demás.

La eliminación de los contrincantes es a través de misiles o proyectiles, que están dados por rectas que los jugadores describen para eliminar a sus contrincantes. Otra de las estrategias del juego es la ubicación de cada una de las naves de los jugadores y los movimientos que estas puede realizar dentro del plano cartesiano.

¹¹Véase en <http://www.emol.com/noticias/tecnologia/detalle/detallenoticias.asp?idnoticia=407400>

5.2.1. Ubicación en el plano cartesiano

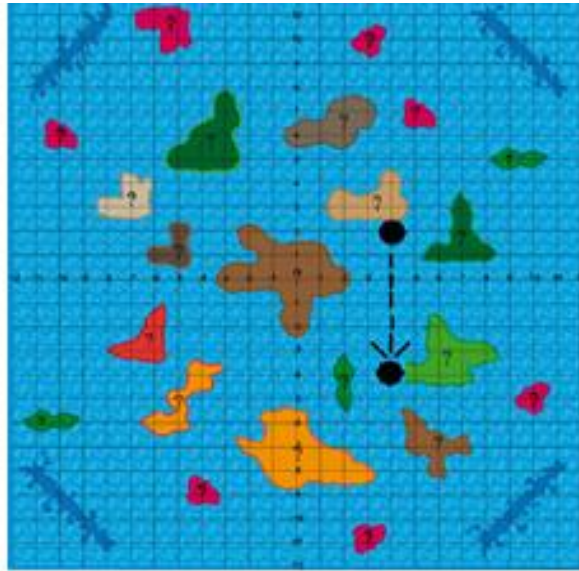


Figura 6: Mapa, Dado y Moneda de ejes.

La ubicación en el tablero de juego, que asemeja el plano cartesiano, es a través de una moneda de ejes y un dado. La moneda de ejes indica el eje por el cual se desplazara la nave que el jugador controla, mientras que el dado indicara la cantidad de espacios a desplazarse. Lo que permitirá al jugador recorrer todo el tablero.

Al comenzar el juego el jugador debe enfrentar la primera decisión. El lanzamiento de la moneda de ejes indica el sentido del desplazamiento pero es decisión de éste si sube o baja en caso de salir Y, o derecha o izquierda en caso de salir X.

El mapa dibujado en la figura 6 representa a un jugador que se encuentra en el punto (4,2), lanza el dado y la moneda de ejes para su desplazamiento, mostrando el número 6 y la cara Y, es decisión de él si sube o baja 6 cuadrantes con su nave de acuerdo a la estrategia que utilice. En este caso el jugador se traslada hacia abajo ubicándose en el punto (4,-4).

De esta forma el alumno:

- Reconoce el plano cartesiano.
- Ubica puntos en el plano cartesiano
- Se desplaza en el plano cartesiano.

5.2.2. Lanzamiento de proyectiles

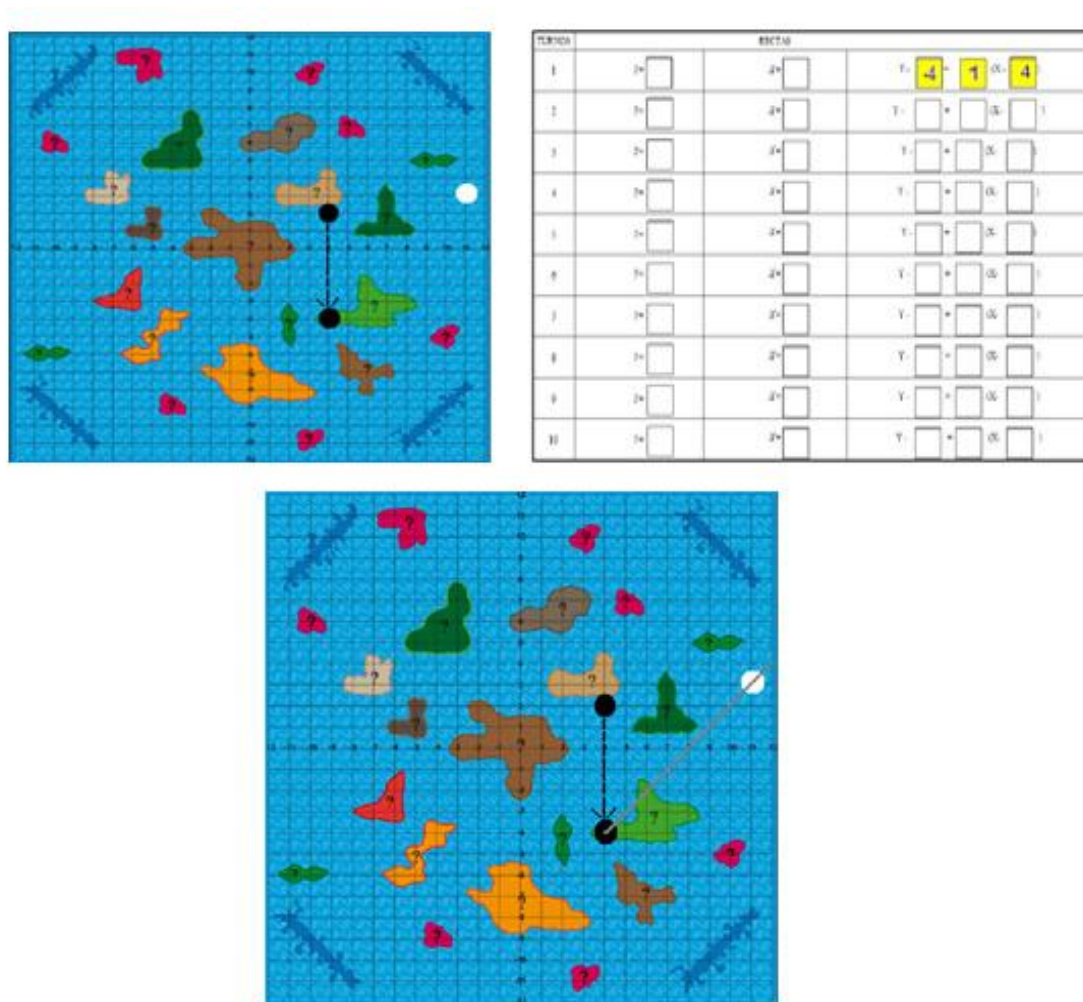


Figura7: Lanzamiento de Proyectil.

En este punto comienzan a notarse las bondades de este juego educativo.

El tablero es bastante cómodo para representar la gráfica de una recta. Es por ello que esperamos que los alumnos asocien de una mejor manera la gráfica de una recta a la ecuación general de ésta.

Los lanzamientos de todos los misiles (rectas), de cada nave se trabajan en la cartilla de rectas, cada jugador, inmediatamente después de efectuar un desplazamiento tiene que lanzar un misil a algún

oponente, este misil tiene que ser anotado en la cartilla. Para confeccionar un misil es necesario reconocer las pendientes descritas en el transportador mágico (ver más detalle anexo 2), ya que son sólo estas las que se podrán utilizar en este juego. Para lanzar un misil, el jugador examina una pendiente en el transportador mágico que le permita eliminar a algún contrincante. Luego de escoger la pendiente, esta es anotada en la cartilla de rectas (ver más detalle anexo 2), junto con el punto de ubicación de la nave.

Para corroborar si el misil acierta a algún contrincante, se utiliza el transportador mágico. Se ubica el centro del transportador en el punto donde se encuentra la nave alineándolo de forma paralela al eje de las abscisas. La medida se determina en sentido contrario a las manecillas del reloj. Se marca la pendiente descrita en la cartilla, en el tablero de juegos, uniendo el punto donde se encuentra la nave con esta marca, formando la recta descrita en la tablilla. En caso de que este “misil” se cruce con alguna nave enemiga, esta última pierde una de las 3 vidas que posee.

Siguiendo el ejemplo mostrado en la figura 7, el jugador que se encuentra en el punto $(4,-4)$, y desea eliminar a la nave que se encuentra en el punto $(11,3)$, tendrá que describir la trayectoria de un misil que le permita interceptar a la nave en algún punto. Para corroborar si la recta escrita en la tablilla es la que intercepta al punto $(11,3)$, se utiliza el transportador mágico, en el que se encuentran las pendientes definidas con anterioridad.

De esta forma el alumno:

- Liga la experiencia del juego con ecuaciones de rectas, y su gráfica en el plano cartesiano.
- Asocia dos registros de representación: el gráfico y el algebraico.
- Se familiariza con el trazado de rectas en el plano cartesiano.
- Se apropia de la idea de que una recta puede ser representada por varios registros y que su gráfica puede ser descrita algebraicamente.
- Puede identificar la ecuación general de una recta con su gráfica.

5.2.3. Intersección de rectas

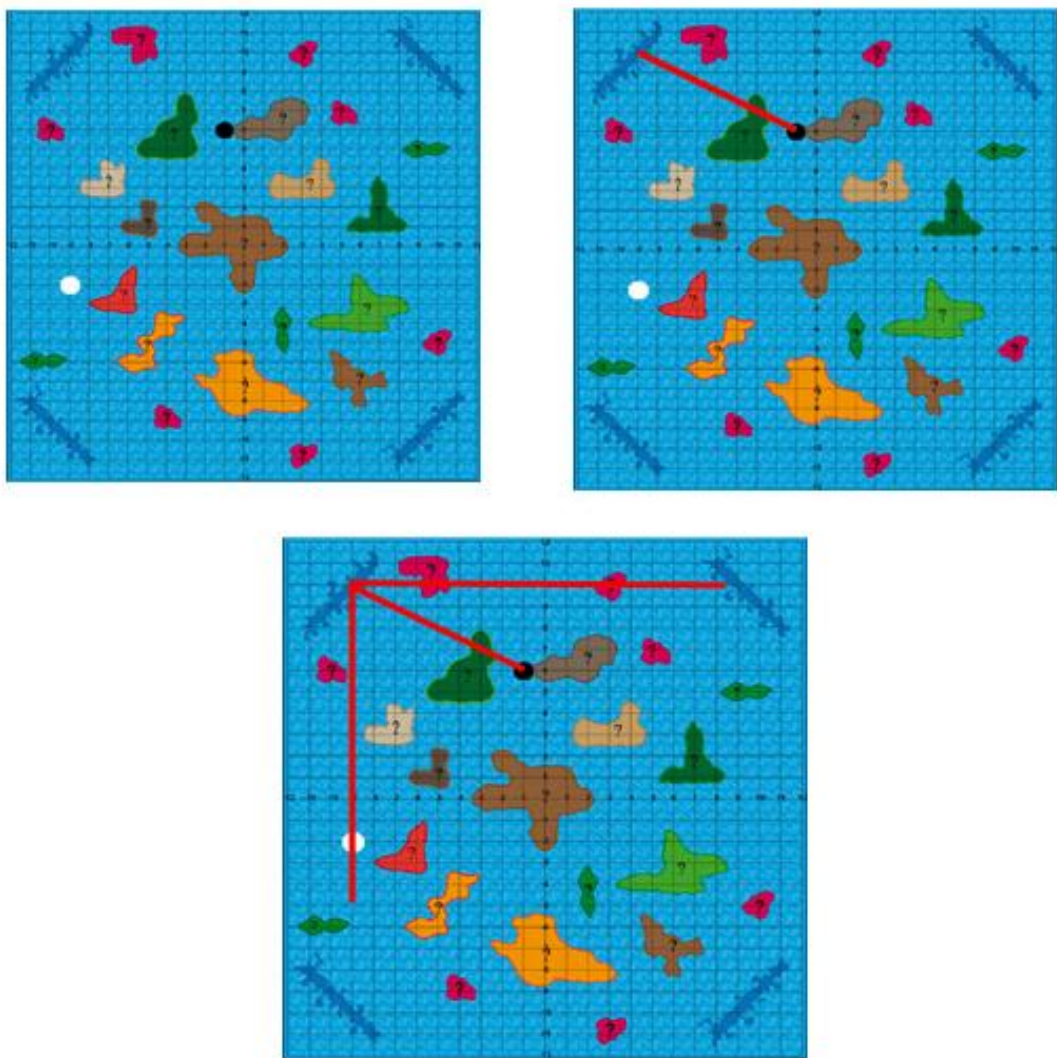


Figura 8: Intersección de recta.

Dejando de lado la solución de un sistema de ecuaciones, nos centraremos en la intersección de dos rectas. En el juego se representará esto como la intersección del misil lanzado por el jugador con la barrera de corales que se encuentran en las esquinas del tablero.

Lo que buscamos con esto es que el alumno logre generar una idea, que el punto de intersección de rectas es la solución de un sistema de ecuaciones lineales de dos por dos. Para ello, es muy

importante hacer notar que es el estudiante quien tiene que crear correctamente el misil que logre dar con algún punto perteneciente a esta barrera, para que esta responda proyectando el punto solución perpendicular a sus ejes. Ésta da como introducción a una nueva versión en donde las proyecciones de los misiles se detengan al chocar con los ejes, y de esta manera enfatizar el hecho de que (x, y) es la solución del sistema de una forma más explícita.

Lo que se espera con esta metáfora es que el alumno pueda relacionar la solución del sistema de ecuaciones con el punto de intersección entre dos rectas.

En determinadas circunstancias y aunque esto se explique en las instrucciones, se observa que el alumno tiene dificultad con la utilización de las barreras, y le resulta más fácil la creación de un misil que le permita la eliminación de la nave sin la utilización de ésta. Sin embargo, se sugiere enfatizar los beneficios de su utilización (como la eliminación de dos naves con un solo misil), para que el alumno vaya adquiriendo la idea de intersección de dos rectas.

Sigamos con el ejemplo mostrado en la figura 8. El jugador se encuentra ubicado en el punto $(-1,6)$, y desea eliminar a la nave ubicada en el punto $(-9,-2)$. Utilizando la barrera de coral, tendrá que crear un misil que le permita dar con esta barrera en una vecindad del punto $(-9,10)$ (de lo contrario las proyecciones del punto de intersección del misil con la barrera, no se encontraran con la nave que desea eliminar). Para lograr que la barrera de coral proyecte este punto como las rectas $X= 9$ e $Y= 10$, acertando al punto $(-9,-2)$, ubicado en la trayectoria de la recta $X=-9$, de no acertar con este punto no podrá eliminar a su oponente.

De esta forma esperamos que el alumno:

- Asocie la intersección de dos rectas (misil y barrera de corales), con la solución del sistema.

5.3. SECUENCIA DE APRENDIZAJE COMO MODELO DE ENSEÑANZA

Como ya es sabido la utilización de un juego educativo puede ser de gran ayuda para el profesor que lo desee aplicar (Mainer B, 2006), pero su utilización tiene que estar planificada de tal forma que se pueda sacar el mejor provecho de este, para que realmente esta herramienta sea una ayuda y no una dificultad más para el estudiante. Lo que queremos es aprovechar este medio para la unidad para la que ha sido construido (unidad sistema de ecuaciones lineales, ecuaciones lineales con dos incógnitas) para ello proponemos un plan de clases para el profesor con la utilización de este juego educativo.

Esta secuencia está diseñada para dos sesiones. En la primera sesión los alumnos juegan y practican con el juego. La segunda clase va estar diseñada de tal forma que los ejemplos de la unidad van a ser dados en base a lo que ellos vivieron en la primera sesión.

		PLANIFICACION PRIMERA CLASE		
SUBSECTOR:		Matemática	UNIDAD: Sistema de ecuaciones lineales.	CURSO: Segundo medio
OBJETIVO FUNDAMENTAL		Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la investigación de la recta y sistema de ecuaciones lineales. Explorar sistemáticamente diversas estrategias para la resolución de problemas; profundizar y relacionar contenidos matemáticos.		
OBJETIVO (S) TRANSVERSAL(ES)		Del ámbito del Desarrollo del Pensamiento, en especial los relativos a habilidades de investigación, a través de las actividades que suponen selección y organización de información y datos; a habilidades de resolución de problemas y de pensamiento lógico, a través del conjunto de contenidos y actividades orientadas al análisis de diversas situaciones, así como la aplicación de leyes y principios, por un lado, y el aprendizaje de algoritmos o procedimientos rutinarios por otro; y habilidades de generalización y de modelamiento a partir de las relaciones observadas.		
Fecha	Aprendizaje esperado	Contenido	Actividad	Evaluación
	Asocian las expresiones gráficas y	Resolución de sistema de ecuaciones lineales con dos	Momento de inicio: se comienza por explicar el juego, definiendo claramente los	Evaluación Formativa.

	algebraicas de los sistemas de ecuaciones y sus soluciones.	incógnitas. Gráfico de las rectas correspondientes. Relación entre las expresiones gráficas y algebraicas de los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones.	puntos más trascendentes de este. El profesor presenta a través de un proyector multimedia el tablero de juego. • Se define claramente cómo se ubican las naves en el tablero, y como son los movimientos que estas pueden realizar. • Se explican cómo se lanzan los misiles (rectas), definiendo como se crea un misil. Dándole las condiciones que tienen que cumplir en caso que la recta sea paralela a los ejes de coordenadas. Y en caso que el jugador desee lanzar un misil con inclinación explicar con ejemplos para que no queden dudas como estos se confeccionan, por	Mediante la ejercitación del juego, que integran los aprendizajes esperados para los contenidos.
--	--	--	--	---

			ejemplo en caso que el jugador se encuentre en el punto (2,-3) y una de las pendientes que señala el transportador mágico es $\frac{1}{2}$ el misil será $Y - \boxed{-3} = \boxed{\frac{1}{2}}(x - \boxed{1})$ • Se explica cómo se corrobora si el misil lanzado por alguno de los jugadores acierta a alguna nave. Explicando con ejemplos el uso del transportador como medio de corroboración. • Cómo funcionan los corales mágicos, como pueden ser activados, en caso que sean activados, cuáles son sus efectos.	
--	--	--	--	--

			Momento de desarrollo: dada la explicación se comienza por dividir el curso en grupos de 5 personas, se entrega un juego a cada grupo, para que ellos comiencen a jugar. El profesor va resolviendo las dudas que pudieran tener en el momento del juego. Momento de cierre: sintetizar y aclarar dudas de los procedimientos que utilizan los alumnos.	
--	--	--	--	--

		PLANIFICACION SEGUNDA CLASE		
SUBSECTOR:		Matemática	UNIDAD: Sistema de ecuaciones lineales.	CURSO: Segundo medio
OBJETIVO FUNDAMENTAL		Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la investigación de la recta y sistema de ecuaciones lineales. Explorar sistemáticamente diversas estrategias para la resolución de problemas; profundizar y relacionar contenidos matemáticos.		
OBJETIVO (S) TRANSVERSAL(S)		Del ámbito del Desarrollo del Pensamiento, en especial los relativos a habilidades de investigación, a través de las actividades que suponen selección y organización de información y datos; a habilidades de resolución de problemas y de pensamiento lógico, a través del conjunto de contenidos y actividades orientadas al análisis de diversas situaciones, así como la aplicación de leyes y principios, por un lado, y el aprendizaje de algoritmos o procedimientos rutinarios por otro; y habilidades de generalización y de modelización a partir de las relaciones observadas.		
Fecha	Aprendizaje esperado	Contenido	Actividad	Evaluación
	Relacionan las expresiones gráficas y	Resolución de sistema de ecuaciones lineales con dos	Momento de inicio: el profesor recuerda lo visto la clase anterior, con la ayuda de un	Evaluación Formativa.

	algebraicas de los sistemas de ecuaciones y sus soluciones.	incógnitas. Gráfico de las rectas correspondientes. Relación entre las expresiones gráficas y algebraicas de los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones.	proyector multimedia se muestra el tablero del juego educacional, para recordar en qué consistía este. Momento de desarrollo: Se comenzará con la explicación de la unidad. El profesor utiliza en todo momento el juego como ente ejemplificador para que los alumnos vayan asociando lo visto en el juego, en donde ellos fueron participe de su aprendizaje, con los contenidos que desea entregar el docente. Momento de cierre: Aclarar y sintetizar las dudas de los procedimientos vistos en la clase. Actividad “reforzamiento” los alumnos deberán desarrollar ejercicios de tarea, los cuales serán entregados por el profesor a través de una guía. Finalmente se	Mediante la ejercitación del juego, que integran los aprendizajes esperados para los contenidos.
--	--	--	--	---

			entregara una encuesta para que respondan los alumnos.	
--	--	--	--	--

CAPITULO VI

*“A cada paso creamos nuestro
propio universo.”*
Winston Churchill

6. RESULTADOS

Aplicada las dos clases descritas en la planificación, se realizó una encuesta a la muestra. Con esto queremos validar si es factible realizar esta actividad en el aula.

Descripción de la muestra

Población: Colegio San Cristóbal College, Santiago.

Colegio Buckingham, Villa Alemana.

Muestra: 50 alumnos (correspondientes a dos segundos medios)

San Cristóbal College: 29 alumnos, 13 hombres, 16 mujeres.

Buckingham: 21 alumnos, 11 hombres y 10 mujeres.

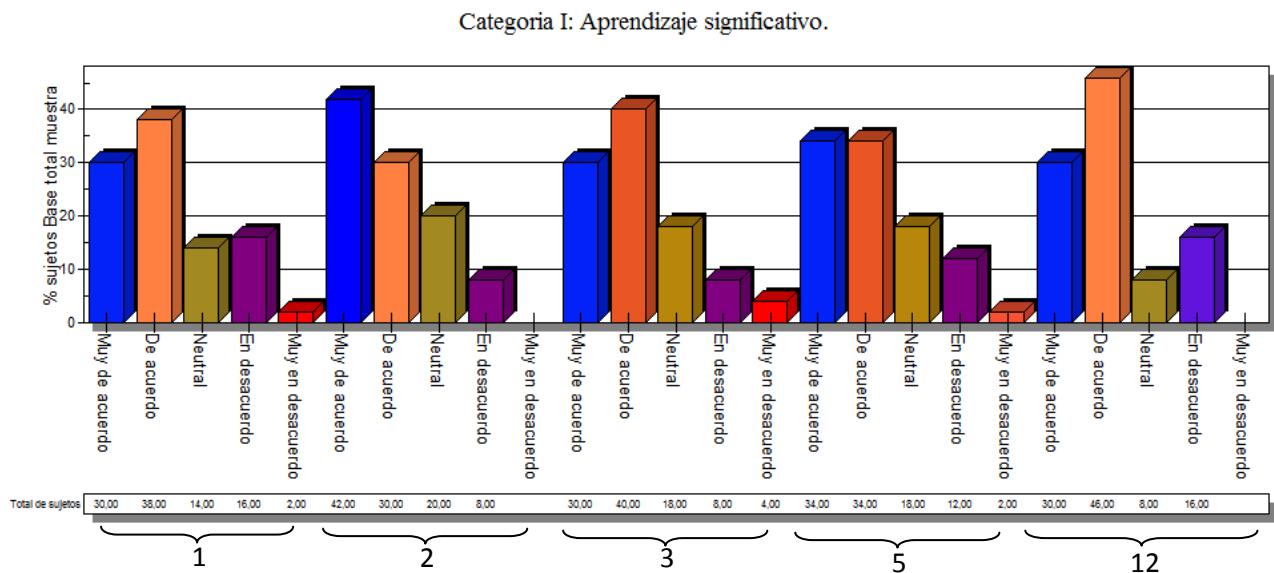
El instrumento evaluativo diseñado para esta propuesta es una encuesta que consta de 12 preguntas clasificadas en 4 categorías (ver anexo 2):

- I. Aprendizaje Significativo.
- II. Innovación Pedagógica.
- III. Actitud frente al Aprendizaje.
- IV. Estructura del Juego.

Cada una de estas categorías está definida con una cantidad de preguntas que explicitan de mejor manera los resultados obtenidos.

- Aprendizaje significativo: Esta categoría consta de 5 preguntas las que son:
 1. La experiencia de jugar facilitó mi comprensión de la unidad.
 2. Introducir una unidad a través de un juego es más entretenido.
 3. Es más fácil representar rectas después de haber jugado.
 5. Los juegos pueden ser útiles para el aprendizaje.
 12. El trabajo grupal facilita el aprendizaje.

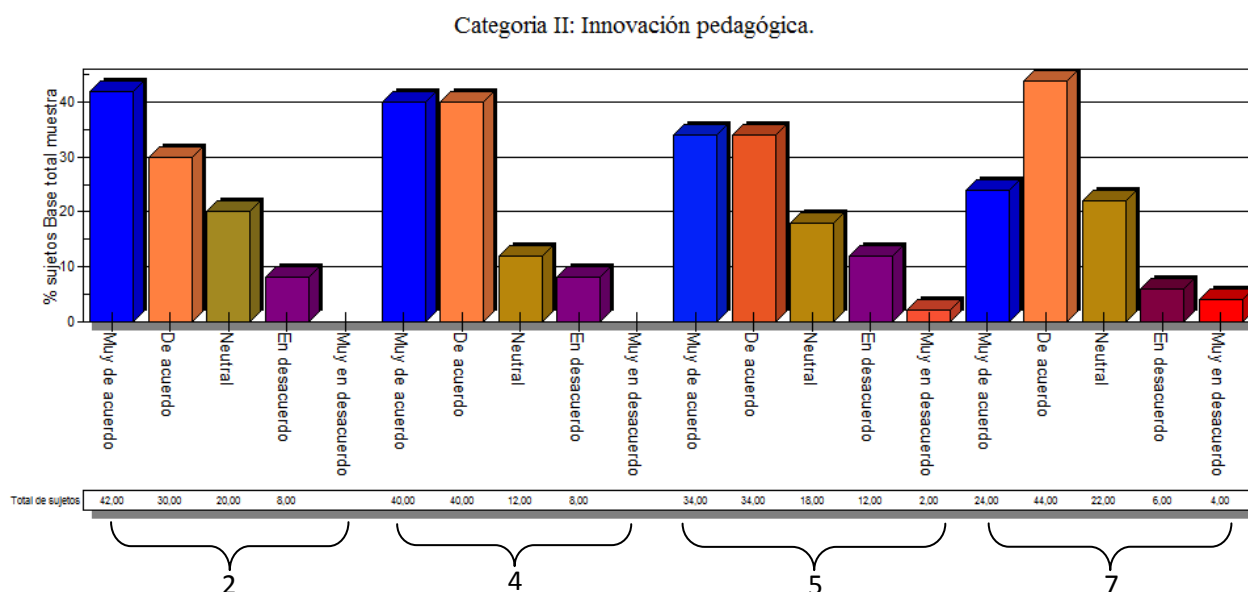
Gráfico:



Se puede observar en el gráfico n°1 que en las 5 preguntas la gran mayoría de las respuesta se concentra en muy de acuerdo y de acuerdo.

- Innovación pedagógica: Esta categoría consta de 4 preguntas las que son:
 2. Introducir una unidad a través de un juego es mas entretenido
 4. Es novedoso utilizar juegos para aprender
 5. Los juegos pueden ser útiles para el aprendizaje
 7. Es importante que el profesor(a) se esfuerce por hacer cosas nuevas en clases.

Gráfico:



Para el gráfico n°2 podemos observar que en la pregunta relacionada con la introducción de una unidad con este tipo de herramientas pedagógica hubo una tendencia a las respuestas muy de acuerdo. También podemos apreciar que en la pregunta relacionada con que es importante que el profesor(a) se esfuerce por hacer cosas nuevas la mayor concentración de respuestas estuvo en de acuerdo. Para las otras dos preguntas de esta categoría las tendencias se concentraron en muy de acuerdo y de acuerdo.

- Actitud frente al aprendizaje: Esta categoría consta de 4 preguntas las que son:
 1. La experiencia de jugar facilitó mi comprensión de la unidad.
 6. Después de esta experiencia las matemáticas son más entretenidas.
 8. Es fácil concentrarse con experiencias como estas.
 9. Creo que este tipo de experiencias me ayudan para estar más preparados para enfrentar una evaluación.

Gráfico:

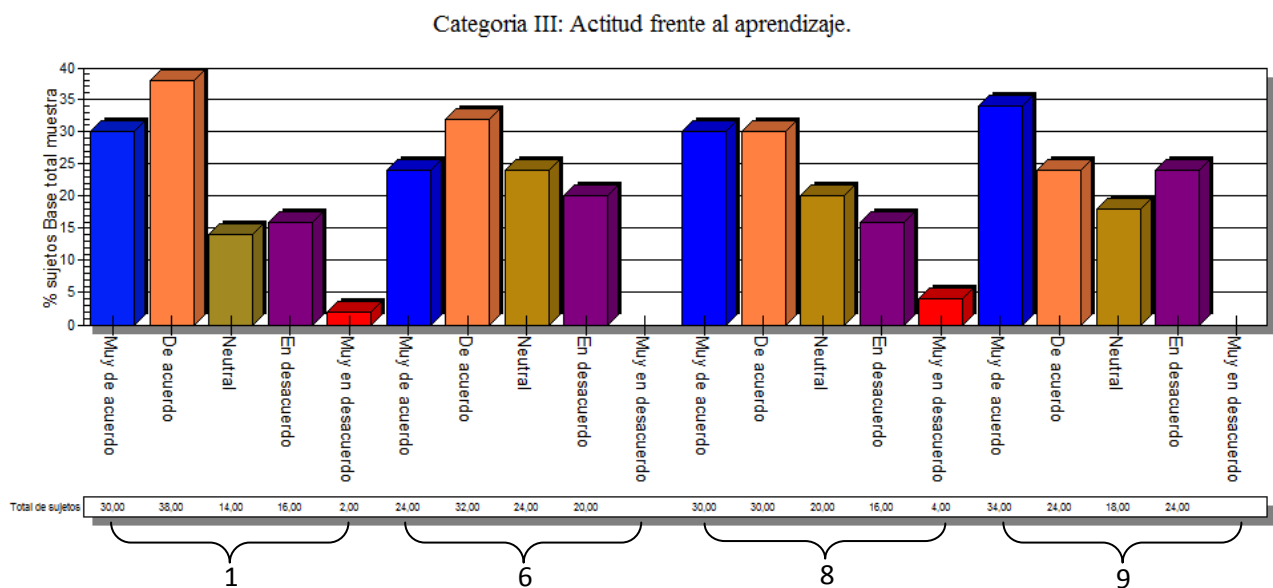


Gráfico 3: Actitud frente al aprendizaje.

En la categoría de actitud frente al aprendizaje, las respuestas se concentraron principalmente en muy de acuerdo y de acuerdo, con una leve inclinación a ésta última.

- Estructura del juego: Esta categoría consta de 3 preguntas las que son:

10. Las reglas del juego son claras.

11. 5 jugadores es una cantidad adecuada para el buen desarrollo del juego.

12. El trabajo grupal facilita el aprendizaje.

Gráfico:

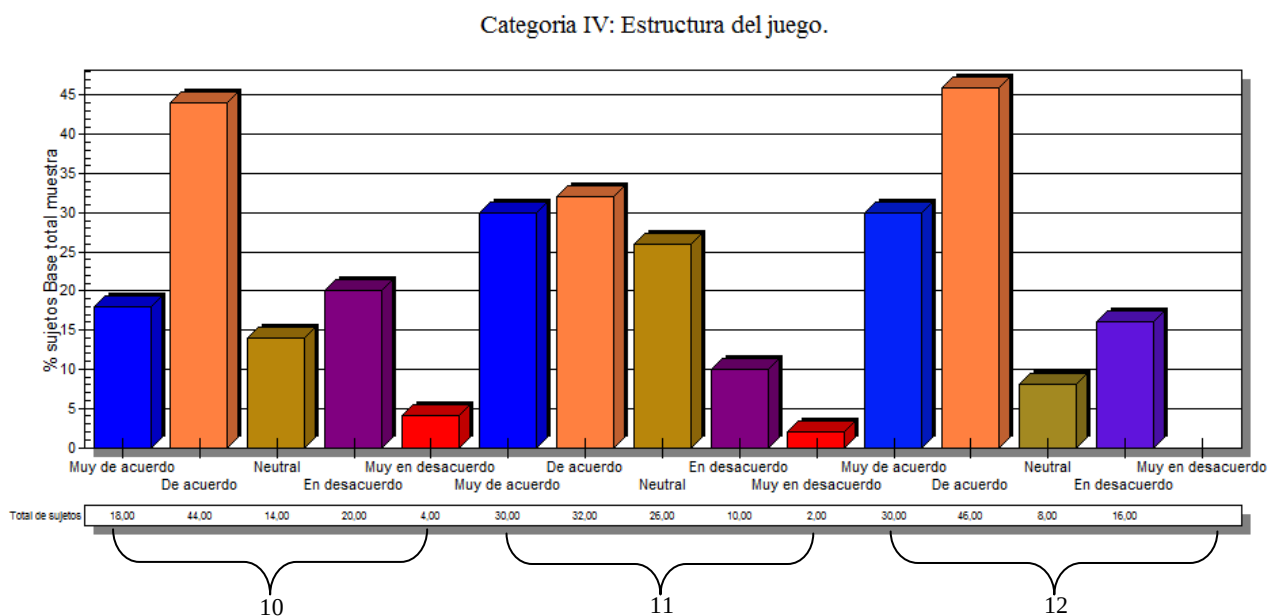


Gráfico 4: Estructura del juego.

En esta categoría el gráfico muestra una tendencia marcada hacia la respuesta de acuerdo en las preguntas 10 y 12. En cambio para la respuesta 11 no se aprecia una tendencia clara.

Dentro de la encuesta existía una última pregunta, la cual los alumnos debían escribir y que hacía referencia a identificar algo del juego que les gustaría mejorar. Para esta pregunta, varios alumnos coincidieron en que debería existir un tiempo limitado por participante en cada jugada; que las instrucciones deberían ser más claras y cortas; y que el número de jugadores debería ser menor.

*“Todo lo que somos es el resultado
de lo que hemos pensado.”*
Buda.

7. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha creado un juego educacional con la ayuda de metáforas como propuesta pedagógica para estudiantes de NM2, con el fin de facilitar la introducción de un contenido matemático (las ecuaciones lineales de dos por dos).

Esta propuesta se ha llevado a cabo por medio de tres etapas; la creación del juego junto a la metodología de aplicación, la aplicación del juego y su evaluación a través de encuestas. La primera etapa de creación del juego es descrita ampliamente en el capítulo V. El objetivo de la segunda y la tercera etapa de aplicación del juego fue el mostrar que hay una percepción positiva de parte de los estudiantes hacia esta metodología. Finalmente, en la etapa de evaluación, se obtuvieron resultados favorables, pues en las cuatro áreas evaluadas se logró un 60% de aprobación como promedio.

La innovación en recursos pedagógicos como los juegos educacionales en las clases de matemáticas, logran captar la atención de los alumnos (Araya, 2000). Esto queda demostrado con la evaluación realizada en las cuatro áreas, logrando así una propuesta didáctica para el profesor, donde se obtiene un aprendizaje significativo. Para esto se tomaron algunas posturas didácticas como las que plantea Guy Brousseau y la propuesta metafórica de Lakoff y Núñez.

Asimismo, en este trabajo se asumió la interpretación de la metáfora como un dispositivo que permite dar significado a un concepto incierto a través de uno conocido, desarrollando en los estudiantes una destreza que les ayudara para la comprensión de los contenidos que se están presentando (Araya, 2000).

La metodología que se está planteando con esta herramienta es que el alumno vaya aprendiendo a partir de sus habilidades y conocimientos, aumentando el interés y desarrollo del pensamiento. Más bien, éste se va introduciendo en el juego sin saber que por medio de él va adquiriendo herramientas para su previa utilización.

A partir de esto, se concluye que son muchos los beneficios que se pueden obtener con este tipo de herramientas educativas, ya que aumenta la disposición hacia el estudio de la Educación Matemática, cambiando la disposición que los alumnos tienen de esta materia.

8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

8.1. BIBLIOGRAFÍA.

Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. M. (2006). *Errores y Dificultades en matemática “Análisis de causas y sugerencias de trabajo”*. Villa María, Provincia de Córdoba: Universidad Nacional de Villa María.

Araya, R. (2000). *Inteligencia Matemática*. Santiago, Chile: Editorial Universitaria.

Araya, R. (2012). Torneos de matemática y ciencias masivamente multijugador: experiencia y oportunidades desde la práctica. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana* , 49 (1), 65-74.

Arias, D. (2006). Estrategias facilitadoras de la creatividad en pro del docente. Hacia la búsqueda de la educación del siglo XXI. *Ciencias de la educación*, 28, 185-204.

Attewell, J., & Savill-Smith, C. (2003). Mobile learning and social inclusion: focusing on learners and learning. *Learning with mobile devices*, 12-20.

Caneo, M. (1987). *El juego en la enseñanza de las matemáticas*. Temuco: Universidad Católica de Temuco.

Carretero, M. (1997). *Constructivismo y educación*. México: Progreso.

De Bono, E. (1993). *El pensamiento Lateral* (Vol. 5). Barcelona: Paidós.

De las Heras, R., Fuenzalida, G., Lara, M., & José, R. (1993). *Álgebra y Geometría II*. Santiago: Antártica S.A.

- Díaz, A. M., Vicente, B., Romera, C., Ruiz, L. M., & Tejero, L. (2003). *Álgebra (Lineal Básica)*. Madrid: Sanz y Torres.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle y Peter Lang S.A.
- Efimov, N. (1969). *Curso breve de Geometría Analítica* (Segunda ed.). (E. Bernardo, Trad.) Moscú: MIR.
- Gagné, R. (1985). *The conditions of learning and Theory of Instruction (4th ed)*. New York: Lawrence Erlbaum Assoc.
- Gagné, R. (1986). *La instrucción basada en la investigación sobre el aprendizaje*. México: Universidad Iberoamericana.
- Gagné, R. M., Briggs, L., & Walter W, W. (1992). *Principles of Instructional Design. 4th ed*. Fort Worth: Harcourt Brace Jovanovich College Publishers.
- Garzarelli, J. (2002). *La competencia*. Argentina: Universidad del Salvador.
- Gómez, M., Mir, V., & Serrants, M. (1997). *Propuesta en la intervención en el aula, técnicas para lograr un clima favorable en clases*. Madrid, España: Nancea.
- Gordillo, M. (2003). Metáforas y simulaciones: alternativas para la didáctica y la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 2(3), 377-398.
- Lakoff, G., & Jonson, M. (1980). *Metáforas de la vida Cotidiana*. Madrid: Cátedra.
- Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where Mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.
- Lay, D. C. (1999). *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*. Naucalpan de Juárez: Addison Wesley Longman.
- Lehmann, C. H. (1989). *Geometría Analítica*. México: Limusa.

- Mainer B, B. (2006). El videojuego como material educativo: La Odisea. *Icono 14*, 3.
- Mayles, J. (1999). *El juego en la educación infantil y Primaria*. Madrid, España: Morata.
- Vázquez, R. (2007). Las Metáforas: Una Vía Posible para Comprender y Explicar las Organizaciones Escolares y la Dirección de Centros. *Revista Electrónica Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 5(3), pp. 137-151.
- Williams, G. (2002). *Álgebra Lineal con aplicaciones*. México: Mcgraw-Hill.
- Wolfgang, K. (1993). *Psicología Educativa*. Ecuador: Abyao-Yala.

8.2. LINKOGRAFÍA

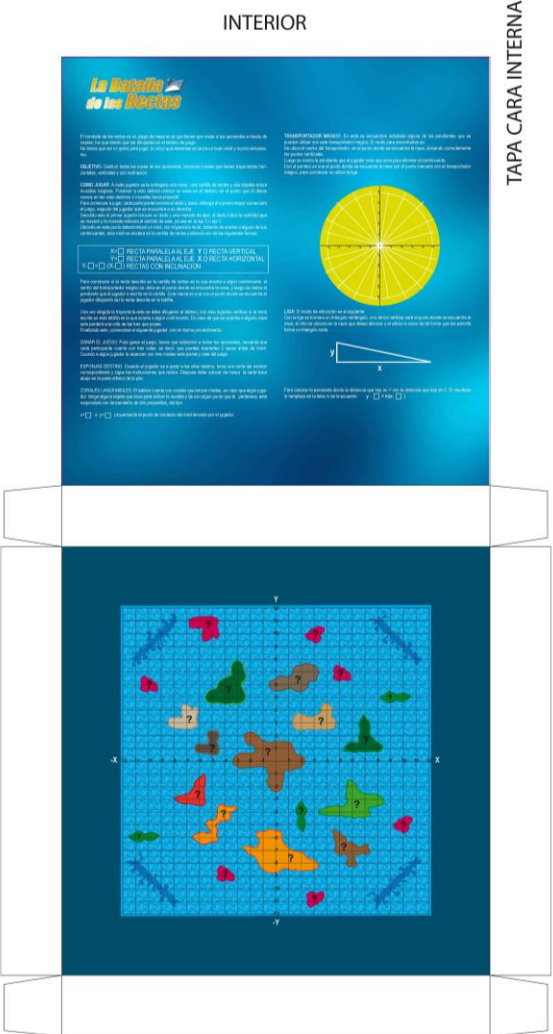
- Acevedo, J. I. (18 de Enero de 2008). *Tesis en red*. Recuperado el 17 de Enero de 2011, de <http://www.tesisenred.net/TDX-0515109-085142>
- Angela, M., Anne, S., & Ysanne, H. (2002). *www.teem.org.uk*. Recuperado el 18 de Enero de 2011, de http://www.teem.org.uk/publications/teem_gamesined_full.pdf
- Vega, M. (1999). *Universidad Complutense de Madrid*. Recuperado el 15 de enero de 2011, de http://www.ucm.es/info/especulo/numero11/met_ari.html

CAPITULO IX

“Todo poder proviene de adentro, y por consiguiente está bajo nuestro propio control.”
Robert Collier

9. ANEXOS

9.1. ANEXO N°1 “DISEÑO JUEGO FINAL”
EXTERIOR



9.2. ANEXO N°2 “REGLAS DEL JUEGO”

El combate de las rectas es un juego de mesa en el que tienes que hundir a tus oponentes a través de misiles. La trayectoria de estos misiles tiene que ser dibujada en el tablero de juego.

No tienes que ser un genio para jugar; lo único que necesitas es lanzar un buen misil y mucho entusiasmo.

Materiales: 1 tablero de juego, naves de combate, cartillas de rectas, 1 dado, 1 moneda de ejes, 1 transportador mágico, 1 liga y 20 tarjetas esponjas destino (ver mas detalle anexo 3).

Objetivo: Destruir todas las naves de tus oponentes, lanzando misiles con trayectorias horizontales, verticales y con inclinación.

COMÓ JUGAR

A cada jugador se le entregara una nave, una cartilla de rectas (ver figura 16) y dos tarjetas “activa barreras de coral”. Posterior a esto deberá colocar su nave en el tablero, en el punto que el desee menos en las esponjas destinos o corales lanza proyectil.

Para comenzar a jugar, cada participante lanzara el dado y quien obtenga el número mayor comenzara el juego, seguido del jugador que se encuentre a su derecha.

Decidido esto el primer jugador lanzara un dado y una moneda de ejes, el dado indica la cantidad que se moverá y la moneda indicara el sentido de este, ya sea en el eje X o eje Y.

Por ejemplo: Si el dado muestra el número 4 y la moneda de eje me indica Y, el jugador tendrá que desplazarse 4 espacios en el eje vertical, pudiendo subir o bajar como él lo determine.

En el caso que el jugador con su desplazamiento salga del tablero este se tiene que devolver en sentido contrario.

Por ejemplo: si el jugador se encuentra en el punto (10,-1), y al lanzar el dado y la moneda de ejes, estas muestran el número 6 y la cara X, y el jugador desea desplazarse hacia la derecha solo podrá avanzar 2 espacios por lo que llegando a este punto tendrá que devolverse en sentido contrario 4 espacios, localizándose en el punto (8,-1).

Ubicado en este punto deberá lanzar un misil, con trayectoria recta, tratando de acertar a alguno de sus contrincantes, este misil se anotara en la cartilla de rectas pudiendo ser de las siguientes formas:

$$X = \boxed{}$$

Recta paralela al eje Y, o recta vertical. Por ejemplo si el participante se encuentra en el punto (-6,5), el misil será la recta $X=-6$ ver figura 9.

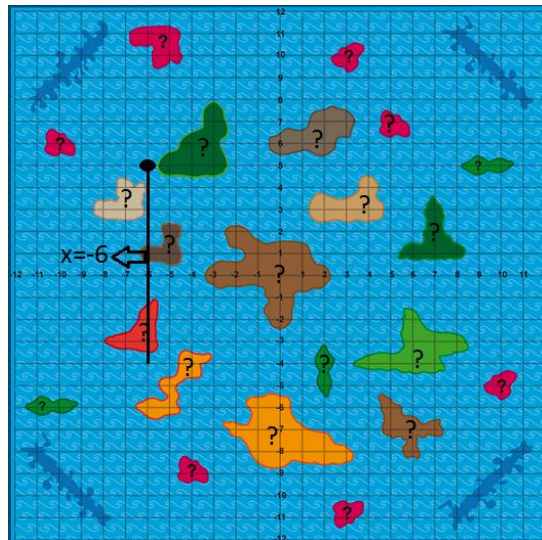


Figura 9: Recta paralela al eje Y.

$$y = \square$$

Recta paralela al eje X, o recta horizontal. Por ejemplo si el jugador se encuentra en el punto (-6,5), el misil será la recta $Y=5$ ver figura 10.

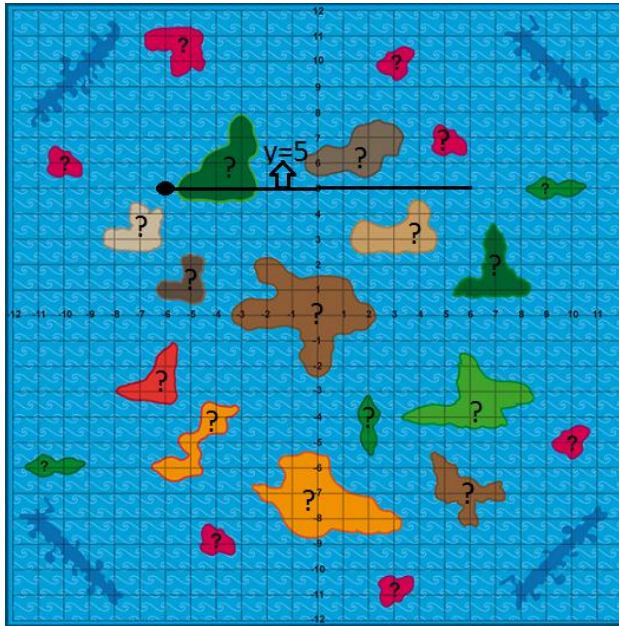


Figura 10: Recta paralela al eje X.

$$y - \square = \square(x - \square)$$

Rectas con inclinación. En caso que el misil utilizado sea una recta inclinada, la pendiente que se puede utilizar son solo las que aparecen en el transportador mágico señaladas en el tablero de juego. Por ejemplo si el jugador se encuentra en el punto (-6,5) y una de las pendientes que señala el transportador mágico es -1, la recta será $y - \square = \square(x - \square)$

Para corroborar si la recta descrita en la cartilla es la que acierta a algún contrincante, el centro del transportador mágico se ubica en el punto donde se encuentra la nave, y luego se marca la pendiente que el jugador a escrito en la cartilla. Esta

marca se une con el punto donde se encuentra el jugador dibujando así la recta descrita anteriormente.

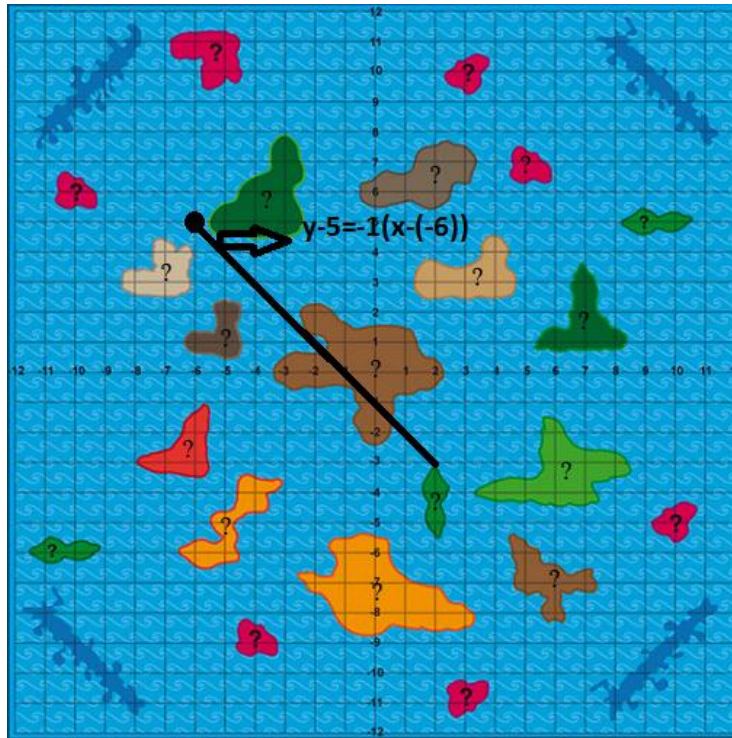


Figura 11: Recta con inclinación.

Una vez elegida la trayectoria esta se debe dibujar en el tablero ver figura 11, con esto lograras verificar si la recta escrita en esta tablilla es la que acierta a algún contrincante. En caso de que aciertes a alguna nave esta perderá una vida de las tres que posee. Finalizado esto, comenzara el siguiente jugador, con el mismo procedimiento.

Ganar el juego: Para ganar el juego, tienes que sobrevivir a todos tus oponentes, recuerda que cada participante cuenta con tres vidas, es decir, que puedes acertarles 2 veces antes de morir. Cuando a algún jugador le alcancen con tres misiles este pierde y sale del juego.

El jugador que posea alguna vida ante la eliminación de los demás jugadores, es el ganador.

Esponja Destino: Cuando el jugador va a parar a las esponjas destino, toma una carta del montón correspondiente y sigue las instrucciones que reciba (ver figura 17). Después debe colocar de nuevo la carta boca abajo en la parte inferior de la pila.

Barrera de coral: El tablero cuenta con barreras que lanzan misiles, en caso que algún jugador tenga alguna tarjeta que sirva para activar la barrera y de con algún punto que le pertenece, esta responderá con lanzamiento de dos proyectiles, del tipo $x = \square$ e $y = \square$ proyectando el punto de contacto del misil lanzado por el jugador y el coral lanza misiles, los que serán perpendiculares a los ejes X e Y .

El jugador es quien elige si activa la barrera, en caso de hacerlo será necesaria una tarjeta de activación.

Por ejemplo: Si el jugador se encuentra en el punto (4,5) y desea activar barrera de coral, tendrá que utilizar una tarjeta de activación, y crear un misil apropiado que me permita dar con algún punto que pertenezca a esta. En caso que el misil elegido sea $y - \square = \square (x - \square)$ este dará en el punto (9,10), la barrera de coral responderá con dos misiles $x = 9$ e $y = 10$ ver figura 12.

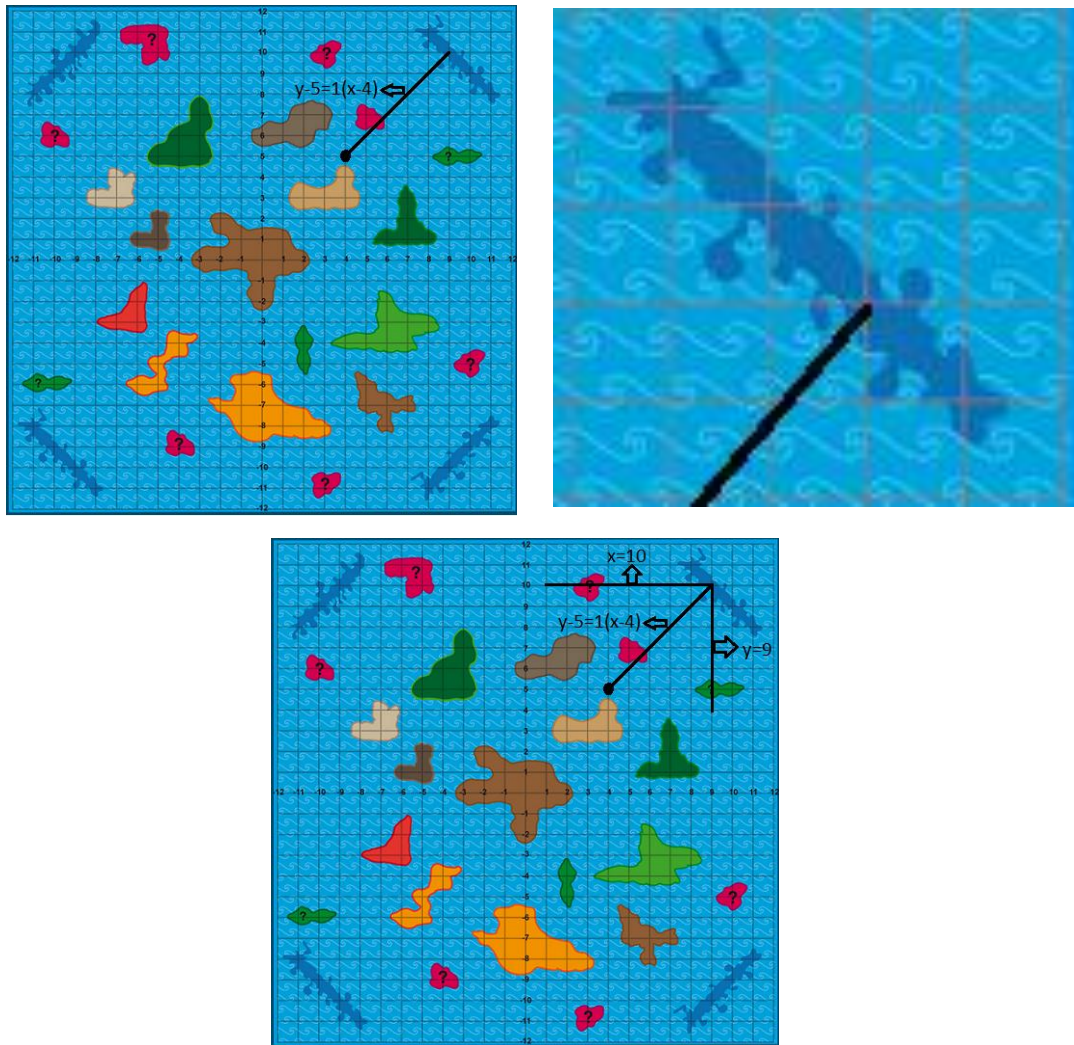


Figura 12: Impacto en la barrera de coral

En caso que los misiles lanzados por la barrera mágica tengan la misma trayectoria en la cual se encuentra el competidor que las activo, este será inmune a él.

Transportador mágico: En este se encuentran señalada las pendientes que se pueden utilizar. El modo de uso es el siguiente:

Se ubica el centro del transportador, en el punto donde se encuentra la nave, ubicando correctamente los puntos cardinales.

Luego se marca la pendiente que el jugador cree que sirve para eliminar el contrincante.

Con la regla se une la ubicación de la nave con el punto marcado por el transportador mágico ver figura 13, para corroborar se utiliza la liga.

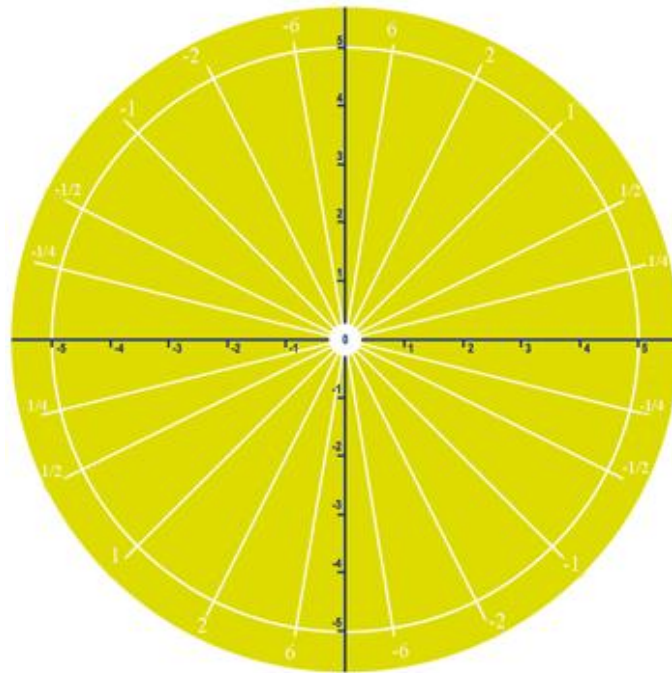


Figura 13: Transportador Mágico

Liga: El modo de utilización es el siguiente:

Con la liga se formara un triángulo rectángulo, uno de los vértices será el punto donde se encuentra la nave, el otro se ubicara en la nave que deseo eliminar y el ultimo lo ubico de tal forma que me permita forma un triángulo recta.

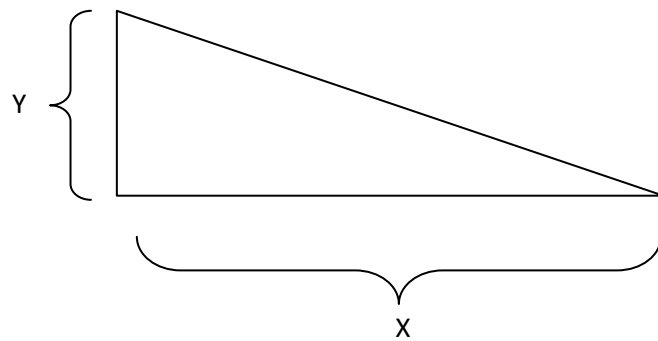


Figura 14: Liga

Para calcular la pendiente hay que dividir la distancia de Y con la distancia de X. El resultado lo remplazo en la letra *m* de la ecuación $y - \square = m(x - \square)$ ver figura 15.

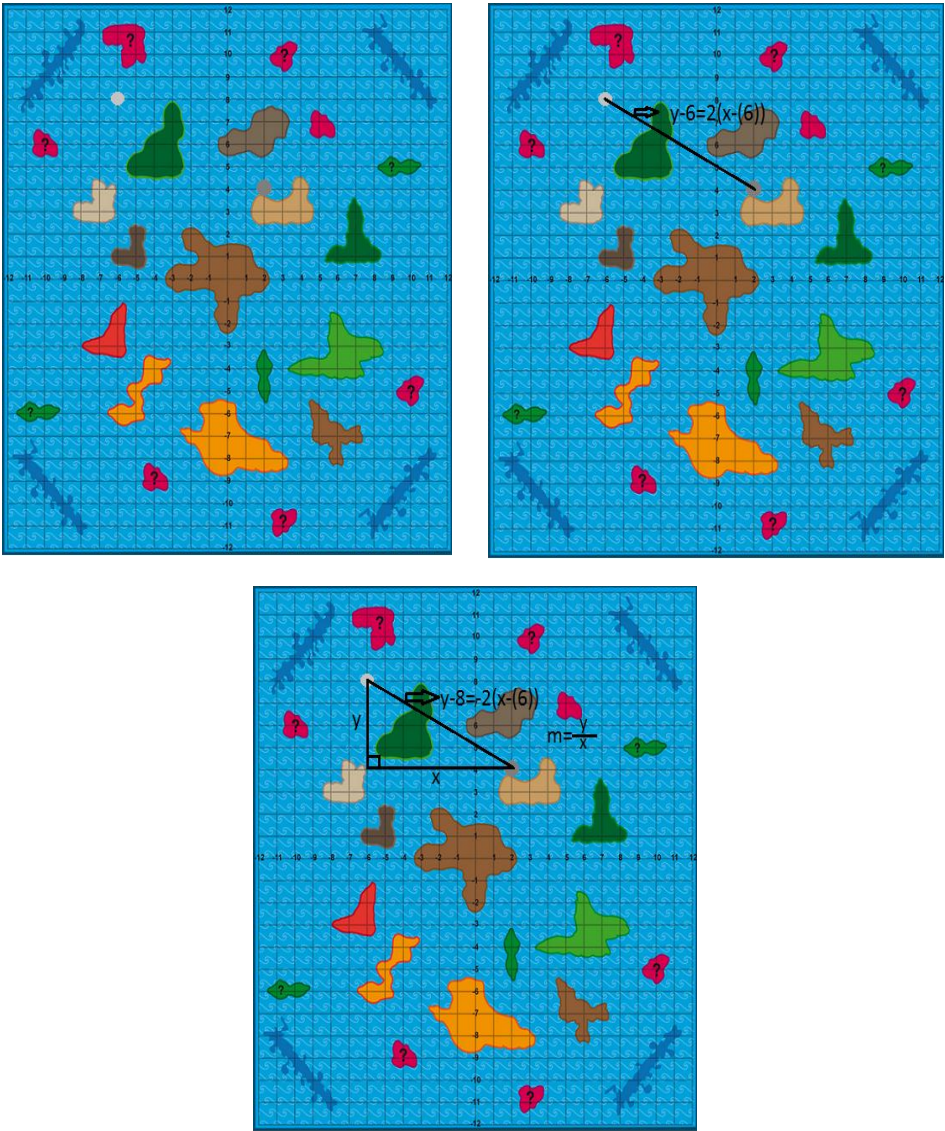


Figura 15: Uso de liga

TURNOS	RECTAS		
1	$Y = \square$	$X = \square$	$Y - \square = \square (X - \square)$
2	$Y = \square$	$X = \square$	$Y - \square = \square (X - \square)$
3	$Y = \square$	$X = \square$	$Y - \square = \square (X - \square)$
4	$Y = \square$	$X = \square$	$Y - \square = \square (X - \square)$
5	$Y = \square$	$X = \square$	$Y - \square = \square (X - \square)$
6	$Y = \square$	$X = \square$	$Y - \square = \square (X - \square)$
7	$Y = \square$	$X = \square$	$Y - \square = \square (X - \square)$
8	$Y = \square$	$X = \square$	$Y - \square = \square (X - \square)$
9	$Y = \square$	$X = \square$	$Y - \square = \square (X - \square)$
10	$Y = \square$	$X = \square$	$Y - \square = \square (X - \square)$

Figura 16: Cartilla de Rectas.

9.3. ANEXO N°3 “TARJETAS ESPONJAS DESTINO”

Pierde una jugada	Te regalamos un uso de liga, en caso de no ser utilizado guarda esta tarjeta para utilizarla cuando lo estimes conveniente.	Ganas un proyectil extra, en caso de no ser utilizada guarda esta tarjeta para utilizarla en tu turno de juego.	Te regalamos un uso del transportador mágico, en caso de no ser utilizado guarda esta tarjeta para utilizarla en turno de juego.
Pierde una jugada	Te regalamos un uso de liga, en caso de no ser utilizado guarda esta tarjeta para utilizarla cuando lo estimes conveniente.	Ganas un proyectil extra, en caso de no ser utilizada guarda esta tarjeta para utilizarla en tu turno de juego.	Te regalamos un uso del transportador mágico, en caso de no ser utilizado guarda esta tarjeta para utilizarla en turno de juego.
Pierde una jugada	Te regalamos un uso de liga, en caso de no ser utilizado guarda esta tarjeta para utilizarla cuando lo estimes conveniente.	Ganas un proyectil extra, en caso de no ser utilizada guarda esta tarjeta para utilizarla en tu turno de juego.	Te regalamos un uso del transportador mágico, en caso de no ser utilizado guarda esta tarjeta para utilizarla en turno de juego.
Vuelve a lanzar el dado y la moneda de ejes, para ubicarte en un nuevo punto.	Salta al punto (-3,6), luego lanza tu proyectil.	Vida extra	Ganaste otra nave la puedes ubicar donde tú quieras, al momento de juego tú decides con que nave jugar.
Vuelve a lanzar el dado y la moneda de ejes, para ubicarte en un nuevo punto.	Salta al punto (5,-6), luego lanza tu proyectil.	Vida extra	Ganaste otra nave la puedes ubicar donde tú quieras, al momento de juego tú decides con que nave jugar.
Salta al punto (2,3), luego lanza tu proyectil.	Salta al punto (-7,2), luego lanza tu proyectil.	Ganas una activa muralla para utilizarlo en tu turno de juego.	Ganas una activa muralla para utilizarlo en tu turno de juego.
Salta al punto (7,2), luego lanza tu proyectil.	Salta al siguiente jugador.	Salta al siguiente jugador.	Salta al siguiente jugador.

Figura 17: Tarjetas esponjas destino

9.4. ANEXO N°3 “CUESTIONARIO”

Número de planilla

CUESTIONARIO

Nos gustaría hacerle algunas preguntas sencillas sobre el juego recién aplicado.

1. Por favor responda las siguientes preguntas

A continuación se muestra una tabla con ciertos ítems en las filas y una escala en las columnas. Por favor valore cada uno de estos enunciados según la escala

	Muy de acuerdo	De acuerdo	Neutral	En desacuerdo	Muy en desacuerdo
	1	2	3	4	5
1. La experiencia de jugar facilitó mi comprensión de la unidad.	○	○	○	○	○
2. Introducir un unidad a través de un juego es más entretenido	○	○	○	○	○
3. Es mas fácil representar rectas después de haber jugado.	○	○	○	○	○
4. Es novedoso utilizar juegos para aprender.	○	○	○	○	○
5. Los juego pueden ser útiles para el aprendizaje.	○	○	○	○	○
6. Después de esta experiencia las matemáticas son más entretenidas.	○	○	○	○	○
7. Es importante que el profesor(a) se esfuerce por hacer cosa nuevas en clases.	○	○	○	○	○
8. Es fácil concentrarse con experiencias como estas.	○	○	○	○	○
9. Creo que este tipo de experiencias me ayudan para estar más preparados para enfrentar una evaluación.	○	○	○	○	○
10. Las reglas del juego son claras.	○	○	○	○	○
11. 5 jugadores es una cantidad adecuada para el buen desarrollo del juego.	○	○	○	○	○
12. El trabajo grupal facilita el aprendizaje.	○	○	○	○	○

2. Hay algo del juego que te gustaría mejorar.

Escriba texto, sea tan amplio como desee

Muchas gracias por su colaboración.