

Incidencia de la velocidad de rotación Ω y la ionización δ en un estudio numérico para vientos estelares.

**Trabajo de Título para optar al título profesional de
Ingeniero Civil Matemático**

Omar Jesús Guerra Villalón

Profesor Guía

Rodrigo Meneses
Escuela de Ingeniería Civil - UV

Profesor Co-Guía

Michel Curé
Instituto de Física y Astronomía - UV

Miembros de la comisión:

Rodrigo Meneses
Michel Curé
Gerardo Honorato (INGEMAT - UV)

INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
VALPARAÍSO, 6 de septiembre de 2024.

A mis padres,

Omar y Catalina, quienes me inspiraron a recorrer las estrellas a pie en este increíble viaje matemático... Y a ti, 2000 años en el futuro.

Agradecimientos

“Si empiezas a lamentarte, aburrirás tus futuras decisiones y dejarás que otros tomen tus decisiones por ti...”

Erwin Smith, 13º comandante del Cuerpo de Exploración

Agradezco antes que todo a mis padres, por darme todo en la vida, por sus dones universales de perdonar mis errores, por su amor incondicional y por haber formado la persona que soy. Les agradezco a ellos por darme la educación tanto académica como de la vida misma. A mi mejor amigo en la vida Matias Saavedra, por alegrarme cada día compartiendo nuestro humor tan particular.

Le agradezco a mi amigo y compañero Sergio Pincheira, que desde que entramos en 2018, no hubo instancia en la que no nos hemos apoyado mutuamente, para sobrepasar las altas dificultades de nuestra carrera. Por el pasado vivido en 2019 y el presente, le agradezco a Aline Zamora, que con mucho cariño la considero una pieza fundamental en la elección de mis actos y proyecciones a futuro, quien no ha dejado nunca de preocuparse por mí. A Kathryn Barraza, mi compañía de estudio y compañera de series a lo largo de toda la carrera, en especial, durante el confinamiento, tu presencia hizo que todo fuera más llevadero y entretenido.

A todo el cuerpo académico del Instituto de Ingeniería Matemática de la Universidad de Valparaíso, por su presión constante y apoyo frente a la adversidad. A mi guía en este trabajo, el profesor Rodrigo Meneses, quien no dudó en aceptarme como su estudiante, por la paciencia, consejos y compromiso. A mi co-guía, el profesor Michel Curé, por darme la oportunidad y confianza de adentrarme en un campo desconocido, Finalmente, al profesor Ignacio Araya, por la voluntad, tiempo y toda la ayuda incondicional que me entregó en este último tiempo.

A cada uno de ustedes, gracias totales.

Resumen

El estudio de los vientos estelares emanados de estrellas masivas es crucial para entender la evolución estelar y el enriquecimiento de sus entornos. Estos vientos, impulsados por la interacción entre la radiación y el gas estelar, determinan propiedades observables clave, como la velocidad terminal y la tasa de pérdida de masa. Este trabajo de título aborda la complejidad de modelar estos vientos mediante un enfoque analítico, resolviendo numéricamente ecuaciones no lineales que describen la dinámica del perfil de velocidad del viento y la tasa de pérdida masa.

Se ha presentado una construcción preliminar del modelos en base a ecuaciones elementales y cambios de variables adecuados, permitiendo una descripción física detallada de los vientos estelares. A través de un procedimiento numérico, se identificaron soluciones numéricas favorables para el análisis paramétrico, centrándose en el perfil de velocidad del viento, los valores propios del problema físico, y la localización de puntos críticos.

En este trabajo, utilizando un modelo de viscosidad, se muestra que los parámetros: de ionización δ y velocidad de rotación Ω son fundamentales para las características del viento estelar. Se encuentra que la disminución de Ω provoca velocidades terminales más altas, mientras que un aumento en δ suaviza el perfil de velocidad, en el sentido de una evolución más monótona. Además, se identifica una relación entre la tasa de pérdida y los puntos singulares a través de la interpretación de valores propios: a medida que los valores propios aumentan, los puntos singulares se alejan de la superficie estelar.

Finalmente, a partir de los resultados presentados en el trabajo de título, estos se pueden interpretar como un estudio preliminar de análisis posteriores enfocados, tal vez, en un estudio conjunto de los parámetros k , α , γ_{vis} , δ y Ω , además de considerar la sensibilidad de las soluciones numéricas a las variaciones en los parámetros mencionados. Un análisis matemático cualitativo podría ser útil para entender mejor cómo estos cambios afectan el comportamiento del modelo de los vientos estelares.

Índice general

Algunas Palabras	6
Resumen	7
1. Introducción	10
1.1. Objetivos	12
1.2. Estado del Arte	12
1.2.1. Soluciones físicas	12
1.2.2. Coexistencia	13
1.2.3. Análisis topológico	14
2. Nociones y modelos físicos	16
2.1. Definiciones elementales	16
2.2. Vientos estelares	17
2.3. Ecuaciones de balance	18
2.4. Antecedentes del modelo físico	19
2.5. Descripción hidrodinámica del viento con la inclusión de la rotación	20
2.6. Soluciones del perfil de velocidad del viento	21
2.6.1. Solución rápida	22
2.6.2. Solución lenta	22
3. Análisis Matemático	25
3.1. Aplicación hidrodinámica de los modelos CAK	25
3.2. Planteamiento de los modelos	26
3.3. Transformación de coordenadas y sistema de ecuaciones	27
3.3.1. Linealización y criterio de valores propios	29
3.4. Antecedentes para la localización de candidatos a puntos singulares	30
4. Resultados para el perfil de velocidad del viento estelar	34
4.1. Procedimiento numérico	34
4.2. Resultados de la literatura	35
4.2.1. Rama de soluciones lentas	37
4.3. Soluciones numéricas rápidas	40
4.4. Soluciones numéricas lentas	42
4.5. Análisis de soluciones	51
4.6. Observaciones sobre los valores propios y velocidades terminales	52
4.7. Análisis de puntos críticos	54
4.8. Conclusiones y discusiones acerca de los resultados obtenidos	55
4.9. Estudios numéricos futuros	55
5. Conclusiones generales del trabajo de título	58

6. Anexos	60
6.1. Programa HYDWIND	60
6.2. Herramientas matematicas	64
6.3. Clasificación de estrellas	66
6.4. Cuadros de Soluciones	66

Capítulo 1

Introducción

El conocimiento sobre las características del viento estelar emanado de estrellas masivas a través de la pérdida de masa, desempeña un papel fundamental en la comprensión de los procesos de evolución estelar, en el enriquecimiento de los entornos cercanos a estas estrellas; además de proveer un método de cálculo de distancias.

Estos vientos se originan a través de la transferencia de cantidad de movimiento desde el campo de radiación hacia el gas, un proceso que se lleva a cabo mediante la dispersión de la radiación en las líneas espectrales. Este mecanismo de impulso es responsable de la aceleración del viento estelar y define muchas de sus propiedades observables, como la velocidad terminal y la tasa de pérdida de masa.

La precisión en la determinación de parámetros del viento, tales como la velocidad terminal y la tasa de pérdida de masa, es esencial para el análisis de las propiedades de los vientos en estrellas masivas. Desde una perspectiva teórica, este desafío implica la resolución de ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento y de la masa que son no lineales. A estas ecuaciones se les añaden condiciones particulares, donde la dinámica del flujo y la dependencia paramétrica de los modelos están estrechamente interrelacionadas, lo que aumenta la complejidad de su resolución.

La teoría comúnmente utilizada para explicar las características observadas de los vientos estelares se basa en el modelo hidrodinámico desarrollado por Castor, Abbott y Klein en 1975 (conocido como el modelo “CAK”). Este modelo, ha sido mejorado por Friend & Abbott [14] y Pauldrach *et al.* [22] en 1986, logrando un acuerdo general con las observaciones. Esta concordancia con las observaciones llevó al desarrollo de un nuevo método para determinar las distancias galácticas utilizando estrellas masivas como referencia, basado en la relación entre la Cantidad de Movimiento del Viento y la Luminosidad (conocida como “WML”, ver [21]). Aunque los vientos estelares pueden ser implementados en la determinación de estas distancias u otros alcances astronómicos (ver por ejemplo *An Introduction to Modern Astrophysics* [6]), el enfoque de este trabajo se centra en analizar sus cualidades intrínsecas de estos vientos, tales como la velocidad terminal y la tasa de pérdida de masa a través de un enfoque paramétrico. Desde un punto de vista matemático, la ecuación de movimiento estacionaria que describe el gradiente de velocidad del viento se expresa de la forma:

$$\left(1 - \frac{a^2}{v^2}\right) r^2 v v' + GM(1 - \Gamma) \left(1 - \Omega^2 \left(\frac{R_*}{r}\right)^{2\gamma_{vis}-1}\right) - 2a^2 r - r^2 g_L = 0, \quad (1.1)$$

donde v denota la velocidad del viento estelar, r la distancia del viento a la superficie de la estrella, y g_L una función que depende de las variables r , v y v' mediante la cual se describe la contribución la fuerza de radiación. En este último término se encuentran las contribuciones de los parámetros del multiplicador de fuerza k , α y δ , en el término g_L reflejando así la fuerte dependencia paramétrica. Por otro lado, el estudio de esta ecuación presenta diversas

dificultades, como el desarrollo de singularidades cuando la velocidad del viento es igual a la velocidad del sonido (constante a), entre otras.

Para que una solución de esta ecuación tenga interpretación física y describa los vientos observados, es necesario imponer diversas condiciones, de tal modo que la solución comience en la fotosfera estelar y atraviese el punto donde la velocidad alcanza el valor crítico $v_c = a$ (ver ecuación (1.1)). El punto anteriormente mencionado se denomina punto crítico o punto singular, y el cumplimiento de $v = v_c$ conduce a la imposición de una condición, denominada condición de singularidad. Además se necesita que la velocidad del viento pueda extenderse a través del espacio, lo cual induce una condición de regularidad.

La interpretación esquemática del problema se presenta en la Figura 1.1

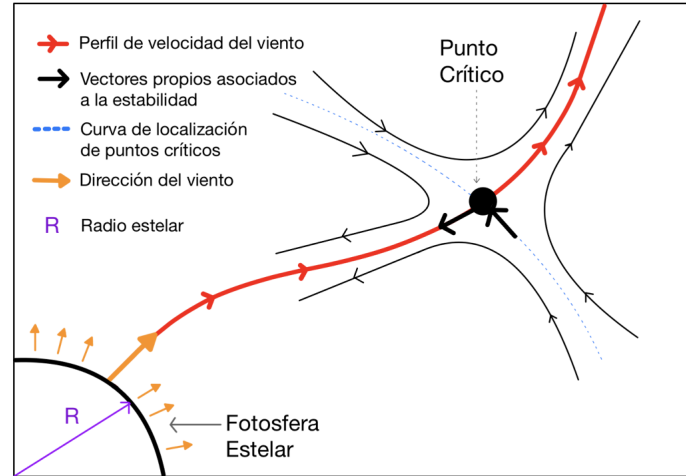


Figura 1.1: Esquema de las condiciones requeridas para que una solución tenga relevancia física. La solución debe comenzar en la superficie estelar, atravesar el punto crítico y luego desarrollar su velocidad terminal. Las curvas negras continuas representan trayectorias de soluciones sin interpretación física correcta.

Así, el modelo CAK se describe a partir de la ecuación de movimiento, la condición de singularidad, condición de regularidad y la condición de contorno impuesta en la fotosfera. Acompañando estas condiciones, existe un valor propio asociado al problema, el cual contiene información principalmente relacionada con la tasa de pérdida de masa ($\dot{M}$).

En este trabajo, se busca analizar las cualidades tanto físicas como numéricas de las soluciones descritas por el modelo, centrándose en la influencia de los parámetros de ionización δ y velocidad de rotación Ω a través de una herramienta computacional denominada HYDWIND. En la literatura, generalmente se ha trabajado con valores altos de ionización y velocidad de rotación por separado; es decir, cuando un parámetro posee un valor alto, el otro es bajo (ver por ejemplo Araya *et al.* [5] y Rodríguez [25]). Estos parámetros serán estudiados en los intervalos $[0.00, 0.35]$ y $[0.95, 0.99]$ respectivamente. Los incrementos realizados para el valor de δ serán de 0.05, mientras que para el parámetro Ω , los decrecimientos se efectuarán con un paso de 0.01.

Tomando una solución previa como condición inicial, se buscará calcular soluciones “lentas” que se caracterizan por tener velocidades terminales bajas, basadas en la teoría m-CAK, que describe el perfil de velocidad del viento cuando el parámetro de fuerza lineal relacionado con la ionización δ y la velocidad de rotación Ω toman valores más altos que los proporcionados por la solución m-CAK estándar o “rápida”.

Las soluciones provenientes del modelo utilizado para la descripción del problema físico, están asociadas a un valor propio y a un punto crítico (o singular mencionado previamente). Este

último se relaciona con la variable independiente de la ecuación, que es de tipo espacial, donde las soluciones que se describen están localizadas en el plano ecuatorial de las estrellas. En cuanto a los valores propios que guardan relación con la tasa de pérdida de masa y los puntos críticos; se buscará establecer una relación entre los parámetros δ y Ω , además de conectarlos con cantidades físicas como las velocidades terminales.

Este trabajo adicional a la literatura, entrega una comprensión de cómo estos parámetros influyen en la estructura y dinámica de los vientos estelares. Primeramente se recopilará definiciones y ecuaciones elementales, las cuales proporcionan información sobre el modelo. Luego se presentará el tratamiento y análisis matemático empleado en la literatura, que permite la obtención de soluciones numéricas e información sobre la localización de los puntos críticos. Después se presentarán los resultados obtenidos y sus respectivas conclusiones.

1.1. Objetivos

2.1 Objetivo General

- 2.1.1 Analizar la dinámica y cualidades de las soluciones lentas descritas por el modelo en base a la influencia de rotación Ω e ionización δ .

2.2 Objetivos Específicos

- 2.2.1 Calcular soluciones numéricas lentas para distintos valores de Ω y δ .
- 2.2.2 Describir físicamente soluciones centrado a velocidades iniciales, terminales y tasas de pérdida de masa.
- 2.2.3 Relacionar la dependencia de los valores propios con los parámetros del modelo Ω y δ .
- 2.2.4 Identificar la evolución de los puntos críticos en función de los valores propios.

1.2. Estado del Arte

En esta sección se mencionan 3 artículos acorde a las dificultades intrínsecas de esta problemática. Los artículos que proporcionan los resultados utilizados en este trabajo se van mencionando en función de la necesidad de estos.

1.2.1. Soluciones físicas

- F.X. de Araújo. "The equatorial plane of Be stars: an outflow driven by optically thin lines?". En: *Astronomy and Astrophysics* 298 (1995), págs. 179-186.

El autor presenta soluciones numéricas precisas para la ecuación del movimiento radial en el plano ecuatorial de estrellas de tipo B en rotación. Además, introduce un parámetro empírico de la viscosidad (para este trabajo de título se denomina γ_{vis}). Se ha considerado un flujo de salida impulsado principalmente (o únicamente) por líneas ópticamente delgadas. Esto se hace disminuyendo el valor del parámetro radiativo α en el dominio (ver Figura (1.2)).

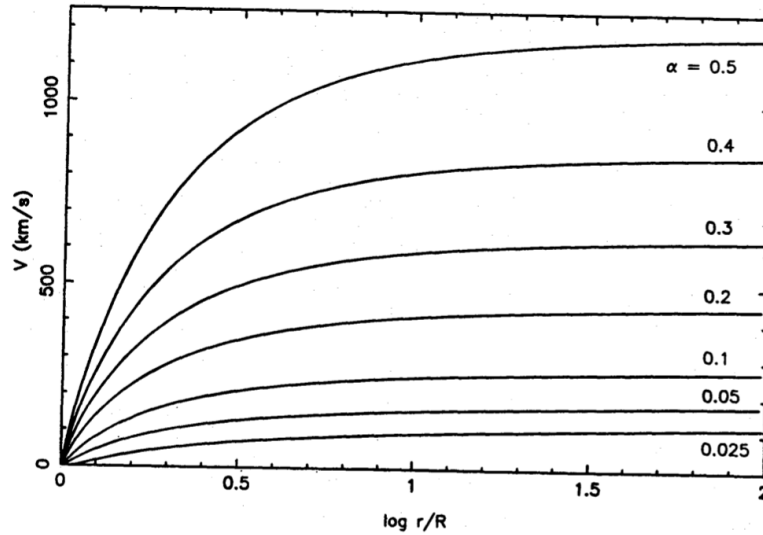


Figura 1.2: Perfiles de velocidad (B0-B1 star), para distintos valores de α (imagen tomada de [12]).

Esto indica que los cálculos de velocidades muestran un decrecimiento en el perfil de velocidad cuando se disminuye el parámetro α , esto es independiente de otros parámetros como la rotación, temperatura, etc. Además el autor menciona que ¿Es éste el principal mecanismo presente en el plano ecuatorial de las envolturas de las estrellas Be?. Ahora no se puede dar una respuesta definitiva a esta pregunta. Deberían desarrollarse modelos más elaborados: la fuerza radiativa debe calcularse de forma autocohérente en lugar de considerar α y k como parámetros "libres".

1.2.2. Coexistencia

- I. Araya, M. Curé, A. ud-Doula, A. Santillán and L. Cidale. "Co-existence and switching between fast and Ω -slow wind solutions in rapidly rotating massive stars". En: *MNRAS* 477 (2018), págs. 755-765.

En este artículo, los autores relatan que la mayoría de los vientos impulsados por radiación de las estrellas masivas pueden modelizarse con la teoría m-CAK, lo que da lugar a la denominada solución rápida. Sin embargo, las estrellas de rotación más rápida entre ellas, especialmente cuando la velocidad de rotación es superior a 75 % de la velocidad de rotación crítica, pueden adoptar una solución diferente, la llamada solución Ω -slow, caracterizada por un viento denso y lento. Usando herramientas computacionales para los casos estacionarios (este caso referente a este trabajo de título) y dependientes del tiempo. Se estudia la región de transición de las soluciones donde la solución rápida cambia a la solución lenta, se estudia esta región de transición para varios modelos ecuatoriales de estrellas de tipo B. En un cierto rango de valores, la solución rápida cambia a la solución lenta. En un cierto rango de velocidades de rotación, se encuentra una región en la que la solución rápida y la lenta pueden coexistir.

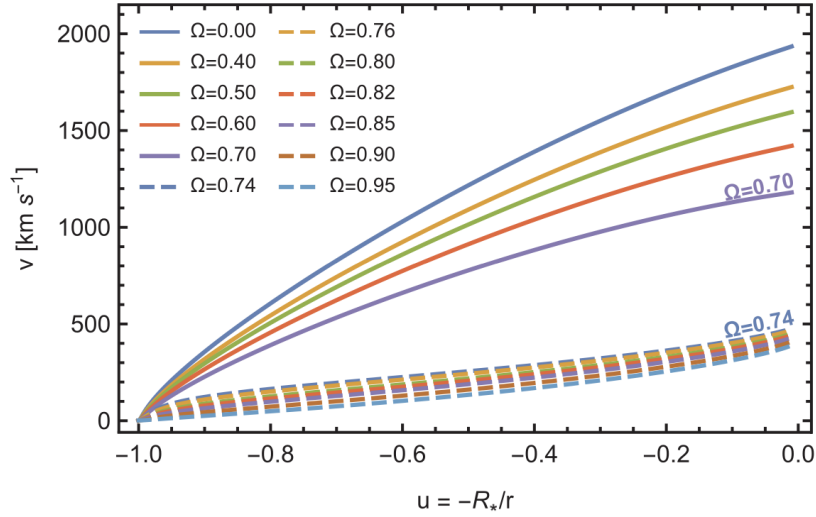


Figura 1.3: Soluciones del viento en estado estacionario a varias velocidades de rotación para un modelo estelar B2.5 de secuencia principal. Las soluciones se obtienen con el código estacionario HYDWIND. Las curvas corresponden a los perfiles de velocidad en función de la coordenada radial inversa u . Las curvas continuas y discontinuas corresponden a las soluciones rápida y lenta, respectivamente (imagen tomada de [4]).

1.2.3. Análisis topológico

- M. Curé y D. Rial. "The influence of rotation in radiation driven winds from hot stars II. CAK topological analysis". En: *Astronomy and Astrophysics* 428 (2004), págs. 545-554.

En este artículo los autores, tras cambios de variables y la introducción de una nueva variable independiente sin sentido físico, se logra sustituir la ecuación diferencial no lineal de movimiento por un sistema de ecuaciones diferenciales en el que todas las derivadas están dadas explícitamente. Esto proviene de la ampliación del estudio de vientos estelares incluyendo el efecto de la rotación estelar y los cambios en la ionización del viento.

En este artículo, para el caso particular donde el viento no contempla ionización ($\delta = 0$) para el cuál sólo se encuentra una solución física, la solución CAK estándar, con un punto crítico tipo silla. Para el caso más general ($\delta \neq 0$), junto al punto crítico (CAK estándar), se encuentra otro punto crítico tipo sumidero que no es representativo a nivel físico (ver Figuras 1.4 y 1.5).

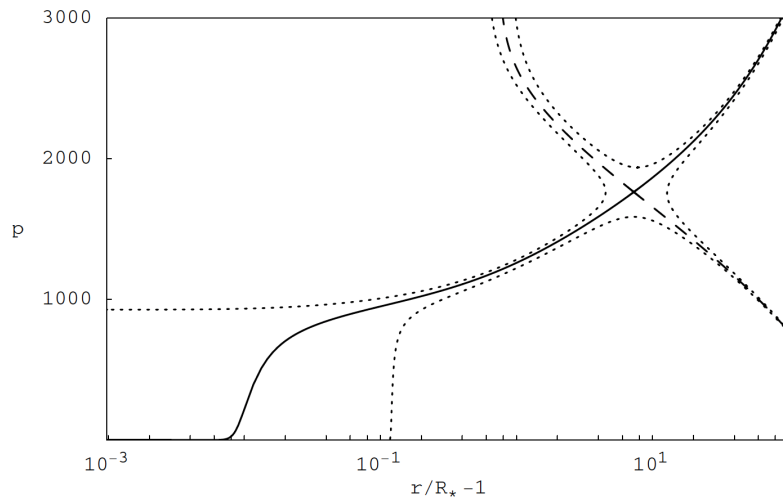


Figura 1.4: La topología del modelo rotatorio-CAK utilizando $\delta = 0$, p en función de $(r/R_* - 1)$ para $\Omega = 0, 25$. La curva única que comienza en la superficie estelar y continúa alejándose de la superficie es la solución original CAK (línea continua) (imagen tomada de [11]).

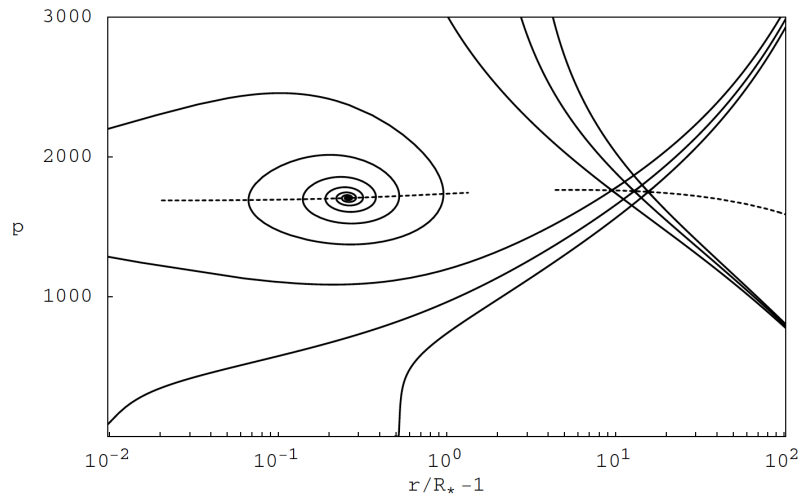


Figura 1.5: Las distintas curvas corresponden a distintos valores de los valores propios (usando $\delta \neq 0$). La curva de la izquierda comienza en el punto crítico (silla) y se ve atrapada por el atractor (imagen tomada de [11]).

Es preciso remarcar de la Figura 1.5, la dificultad intrínseca en la identificación de valores propios, ya que, se ilustra que para distintos puntos críticos no hay admisibilidad de soluciones con interpretación física.

Estos artículos, son referentes en este trabajo ya que representan las distintas adversidades en la problemática:

- La determinación de los parámetros físicos utilizados para encontrar soluciones.
- Las transiciones entre soluciones lentas y rápidas en función de los parámetros.
- La ubicación de puntos críticos.

Capítulo 2

Nociones y modelos físicos

En este capítulo, se abordan los elementos esenciales para la descripción, fundamentación y modelización de vientos impulsados por estrellas masivas. Se presentarán las definiciones elementales, como cuáles son las estrellas de interés hacia la problemática. Además, las propiedades de estas estrellas en relación con el viento y la pérdida de masa, también cómo construir un modelo que permita realizar una descripción de los vientos estelares.

2.1. Definiciones elementales

Las estrellas calientes tienen temperaturas superficiales que superan aproximadamente los 7500 grados Kelvin (K). Y las estrellas masivas se consideran que tienen masas superiores a 8 masas solares $M_{\odot}$ (ver Araya [2]).

Una de las motivaciones principales en el estudio de vientos estelares, es determinar distancias estelares y galácticas, a través de la relación Momentum del Viento-Luminosidad. Esto se emplea identificando estrellas masivas en la galaxia objetivo, donde nos centraremos en las estrellas tipo B (dentro del anexo se encuentra una tabla para la clasificación de estrellas).

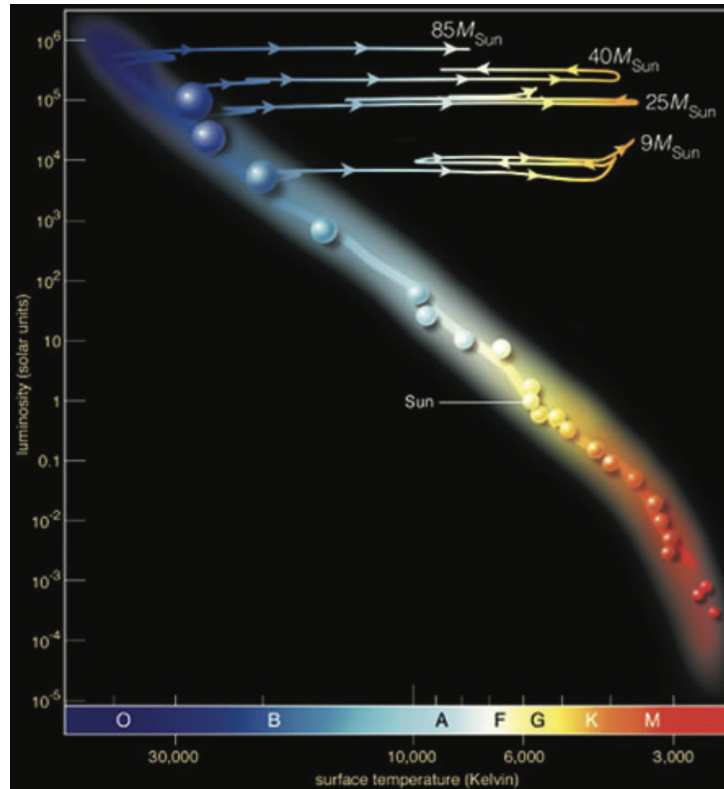


Figura 2.1: Evolución y clasificación de estrellas masivas según temperatura y luminosidad bajo el diagrama HR.

Las estrellas tipo B, cuyas principales características son (para mas detalles ver [6]):

- Tienen temperaturas superficiales entre aproximadamente 10000 y 30000 grados Kelvin.
- Son de color blanco-azulado debido a su alta temperatura.
- Su espectro está dominado por líneas de absorción de Hidrógeno y de elementos ionizados como Helio, Oxígeno, Carbono y Nitrógeno. Las líneas de Helio neutro son prominentes en los espectros de las estrellas B.
- Son muy luminosas, significativamente más que el Sol. Esto se debe tanto a su alta temperatura como a su tamaño relativamente grande.
- Tienen masas que oscilan entre 9 y 25 veces la masa del Sol.

2.2. Vientos estelares

Dentro del estudio de vientos estelares, se tienen 2 parámetros fundamentales para caracterizar a estos, la tasa de pérdida de masa $\dot{M}$ estelar y la velocidad terminal del viento v_∞ .

La tasa de pérdida de masa, es el valor que explica la cantidad de materia expulsada por la estrella por unidad de tiempo debido a las reacciones del interior de esta. Este valor generalmente se expresa en masas solares por año $M_\odot \text{yr}^{-1}$. Si se tiene en cuenta por ejemplo nuestro Sol, la pérdida de masa de este es del orden $10^{-14} M_\odot \text{yr}^{-1}$, mientras que en las estrellas de interés para este trabajo, las tipo B, es del orden de $10^{-6} M_\odot \text{yr}^{-1}$ (ver Fernández [13]). La tasa de pérdida de masa para estrellas de masa M está definida por:

$$\dot{M} = \frac{-d}{dt}M = -\frac{dM}{dt}. \quad (2.1)$$

Por otro lado se entiende por velocidad terminal, v_∞ , como la velocidad máxima que alcanza el viento estelar, cuando se encuentra lejos de la superficie estelar (para más detalles ver [19]). A medida que el viento se aleja de la estrella, el gradiente de velocidad va disminuyendo (dado que la fuerza de radiación para el continuo es proporcional a r^{-2}) hasta ser despreciable, alcanzando el viento una velocidad constante.

Se presenta ahora, una representación gráfica de los vientos estelares en el plano ecuatorial.

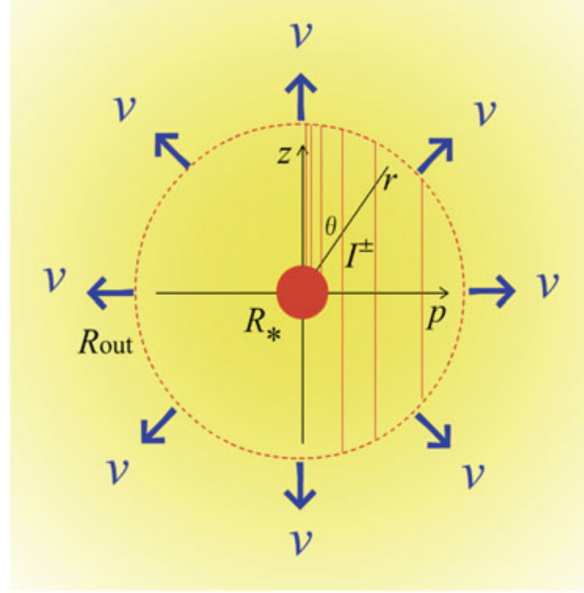


Figura 2.2: El viento es impulsado en la dirección radial r alrededor de una estrella de radio R_* . Las magnitudes de flujo como la velocidad v o la densidad ρ dependen del radio r , mientras que la intensidad radiativa $I^\pm(p, z)$ es una función de las coordenadas (p, z) del espacio definido por $r^2 = p^2 + z^2$ (imagen tomada de [19]).

2.3. Ecuaciones de balance

Para la comprensión del modelo que se expondrá en las próximas secciones, es necesario comenzar con algunas ecuaciones fundamentales, para esto tomemos la construcción realizada por Fernández [13].

La ecuación para la conservación de masa para un elemento de volumen dV se puede establecer como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.2)$$

donde se considera ρ la densidad, $\vec{v}$ es el vector velocidad, donde ambos dependen tanto como de la posición como del tiempo. Dado el contexto estelar integramos esta ecuación para una esfera fija de radio r :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0. \quad (2.3)$$

El primer miembro de esta ecuación corresponde a la masa de la estrella según la ecuación (2.1) para un volumen V , más el segundo miembro hace que la ecuación completa represente la variación de masa de la estrella. Por el teorema de la divergencia (mas detalle del teorema

en [18]), el segundo miembro se puede transformar de una integral de volumen V a una integral de superficie S como sigue:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV = \int_S (\rho \vec{v}) \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \rho v, \quad (2.4)$$

considerando v la componente radial de la velocidad ($\vec{v} = v\hat{r}$ en coordenadas esféricas), teniendo en cuenta que se puede considerar una distribución de masa homogénea, luego la ecuación para la pérdida de masa es:

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(r) v(r) = \text{constante}. \quad (2.5)$$

Se presenta la ecuación de conservación de momentum que contiene información de los procesos que impulsan el viento, considerando un campo con simetría esférica. Para el viento estelar, actúa el gradiente de presión, la aceleración gravitatoria, y la aceleración por la acción de presión del campo de radiación.

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \rho \frac{GM}{r^2} + \rho g_{rad}, \quad (2.6)$$

siendo G la constante de gravitación universal, g_{rad} es la aceleración por causa del campo de radiación y la derivada material de v ; Dv/Dt , se define como:

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{dr}{dt}. \quad (2.7)$$

En este trabajo se considera el caso estacionario que se puede resolver a través del programa HYDWIND [3], entonces:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0. \quad (2.8)$$

De lo anterior se puede escribir la ecuación de movimiento dependiente del radio como sigue:

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2} + g_{rad}. \quad (2.9)$$

Al lado derecho de la igualdad, el primer miembro hace alusión a la aceleración gravitatoria con dirección hacia el centro de la estrella. Para los otros dos, estos apuntan en dirección contraria, esto se debe a que la variable r aumenta hacia afuera de la estrella, la presión P del gas crece hacia dentro. Entonces la derivada dP/dr es negativa, luego el signo es contrario a la fuerza gravitatoria.

2.4. Antecedentes del modelo físico

Para la presión, se considera la ecuación de estado para un gas ideal:

$$P = a^2 \rho \quad (2.10)$$

considerando como constante:

$$a = \sqrt{\frac{k_B T_{eff}}{\mu m_H}}, \quad (2.11)$$

siendo a la velocidad del sonido isotérmica para un gas ideal. Se tiene que k_B es la constante de Boltzmann, m_H es la masa del átomo de Hidrógeno y μ es la media del peso molecular de las partículas de gas.

Ahora basándonos el procedimiento de Araya [2], se puede definir el término g_{rad} en la suma de dos términos $g_e + g_L$.

La aceleración radiativa debido a los electrones, g_e (Scattering de Thompson), puede utilizarse para definir la aceleración radiativa total g_L , acompañado por un factor de multiplicación, el cuál se denomina multiplicador de fuerza:

$$g_L \equiv g_e M(t), \quad (2.12)$$

con

$$M(t) = kt^{-\alpha} (10^{-11} n_E / W(r))^\delta, \quad (2.13)$$

siendo n_E la densidad del número de electrones en unidades de 10^{-11}cm^{-3} [1] y

$$t \equiv \sigma_e v_{th} \rho (dr/dv), \quad (2.14)$$

donde σ_e es el coeficiente del Scattering de Thompson y $v_{th} = (2k_B T_{eff} / m_H)^{1/2}$ es la velocidad térmica del Hidrógeno.

Además, se tiene que:

$$W(r) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{R_*}{r} \right)^2} \right), \quad (2.15)$$

con R_* radio de la estrella.

Mientras que:

$$g_e \simeq \frac{\sigma_e L}{4\pi r^2 c}, \quad (2.16)$$

donde c , es la velocidad de la luz y L la luminosidad de la estrella.

Se puede escribir

$$g_e(r) = \frac{\sigma_e L}{4\pi r^2 c} = \frac{GM}{r^2} \Gamma(r), \quad (2.17)$$

con

$$\Gamma = \frac{\sigma_e(r) L}{4\pi c GM}. \quad (2.18)$$

Entonces, la aceleración debido a las líneas puede ser descrita como:

$$g_L = \frac{\sigma_e L}{4\pi r^2 c} kt^{-\alpha} (10^{-11} n_E / W(r))^\delta. \quad (2.19)$$

Los parámetros k , α y δ son denominados parámetros de multiplicador de fuerza.

2.5. Descripción hidrodinámica del viento con la inclusión de la rotación

Considerando las estrellas B, la rotación de las estrellas no puede ser despreciable, basándonos en la formulación de Rodríguez [25] se tiene que la ecuación de movimiento es:

$$v \frac{dv}{dr} = \frac{-1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{GM}{r^2} + \frac{v_\phi^2(r)}{r} + g_e + g_L. \quad (2.20)$$

Araya y Curé [9], Pauldrach *et al.* [22] y Friend y Abbott [14] investigaron de forma independiente el efecto sobre la fuerza de las líneas que tendría la forma propia de la estrella (fotones

entrantes no radiales) en la cinemática del viento, conocido como factor de corrección del disco finito, desarrollando así la teoría m-CAK. Luego se reescribe la fuerza de las líneas como:

$$g_L = \frac{C}{r^2} f_D(r, v, v') (r^2 v v')^\alpha (10^{-11} n_E / W(r))^\delta. \quad (2.21)$$

donde el factor de corrección del disco finito es:

$$f_D(r, v, v') = \frac{2}{1 - \mu_*^2} \int_{\mu_*}^1 \left(\frac{(1 - \mu^2) \frac{v}{r} + \mu^2 v'}{v'} \right)^\alpha \mu d\mu, \quad (2.22)$$

con $\mu_*^2 = 1 - \left(\frac{R_*}{r}\right)^2$, y la constante C representa el valor propio del problema:

$$C = \Gamma G M k \left(\frac{4\pi}{\sigma_e v_{th} \dot{M}} \right)^\alpha. \quad (2.23)$$

Retomando la ecuación (2.20), el término centrífugo de rotación v_ϕ^2/r da la aceleración centrífuga, siendo

$$v_\phi(r) = \Omega \sqrt{\left(\frac{G M (1 - \Gamma(r))}{R_*} \right)} \left(\frac{R_*}{r} \right)^{\gamma_{vis}}, \quad (2.24)$$

donde $v_\phi = v_{rot} R_*/r$ cuando $\gamma_{vis} = 1$. Dado que γ_{vis} es un parámetro que cambia el momento angular, el torque proporcionado por el roce viscoso, γ_{vis} es un parámetro que simula la viscosidad. Así la cinemática del disco en el ecuador de la estrella cambia según γ_{vis} , de modo que cuando $\gamma_{vis} = 1$ se tiene conservación del momentum angular, y un disco Kepleriano se describe mediante $\gamma_{vis} = 1/2$. Además se tiene que v_{rot} es la velocidad de rotación de la estrella en el ecuador.

$$\Omega = \frac{v_{rot}}{v_{crit}} \quad (2.25)$$

es la tasa de rotación estelar en términos de velocidad de rotación crítica, definida como la velocidad de rotación en la fotosfera a la que la aceleración centrífuga ($\omega^2 R_* = v_{rot}^2 / R_*$) es igual a la aceleración efectiva de la gravedad:

$$v_{crit} = \sqrt{\left(\frac{G M (1 - \Gamma(r))}{R_*} \right)}. \quad (2.26)$$

Por simplicidad notacional, omitiremos la dependencia de r en las ecuaciones. Entonces, sustituyendo variables y reordenando términos, se obtiene el modelo hidrodinámico ecuatorial 1D final para discos de decrecimiento (ecuación de movimiento):

$$\left(1 - \frac{a^2}{v^2} \right) r^2 v v' + G M (1 - \Gamma) \left(1 - \Omega^2 \left(\frac{R_*}{r} \right)^{2\gamma_{vis}-1} \right) - 2a^2 r - r^2 g_L = 0. \quad (2.27)$$

donde se recuerda que la ecuación describe el perfil de velocidad del viento de una estrella de masa M , radio R_* , temperatura efectiva T_{eff} y luminosidad L .

2.6. Soluciones del perfil de velocidad del viento

En este contexto se remarcan dos tipos de soluciones, la solución “estándar” o rápida, y las soluciones “lentas”. La definición de solución rápida o lenta recae en la pregunta de ¿A qué distancia se desarrolla la velocidad terminal del viento estelar?. Dicho de otro modo, a qué distancia se encuentra el punto crítico; ahora si se refiere a la solución rápida, se dice que el perfil

de velocidad atraviesa el punto crítico prontamente (ver siguiente capítulo definición de punto crítico) para llegar más afuera a la velocidad terminal, es decir, el punto crítico se encuentra cercano a la superficie estelar, estas soluciones se caracterizan además por velocidades terminales altas.

Por otro lado, una solución se dice lenta si esta se tarda en desarrollar su velocidad terminal, lo que implica que el punto crítico se encuentra lejos de la superficie estelar. No se ha definido una regla como tal, que establezca una distancia exacta donde se tenga un punto crítico lejano, pero sí se puede decir que sobre cinco radios estelares ($5R_*$) se considera lejano. También al contrario de las soluciones rápidas, una solución lenta posee una velocidad terminal baja ($(v_\infty)_{lenta} < (v_\infty)_{rápida}$).

Estas definiciones hablan de ubicación de un punto, pero existen ramas de soluciones particulares, según Araya [2]:

2.6.1. Solución rápida

A la solución estándar del modelo m-CAK se le denomina solución rápida (Friend y Abbott [14]; Pauldrach et al. [22]), ésta ha tenido éxito en describir las velocidades terminales y pérdidas de masa de estrellas muy masivas, normalmente estrellas de tipo O. La solución rápida normalmente se ajusta por medio de un perfil de velocidad tipo β ,

$$v(r) = v_\infty(1 - R_*/r)^\beta, \quad (2.28)$$

con β , para este tipo de soluciones en el intervalo $[0.8, 1.3]$.

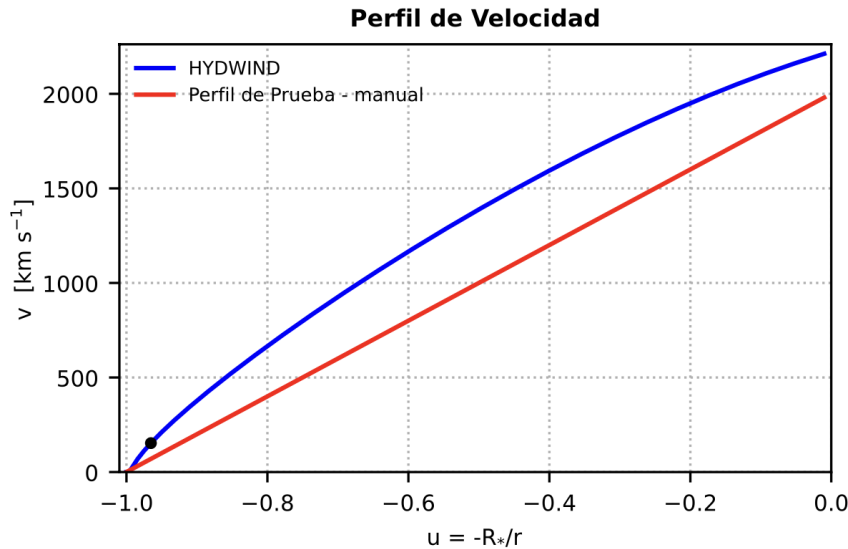


Figura 2.3: La curva azul corresponde al perfil de velocidad de una solución rápida, caracterizada por velocidad terminal alta y punto crítico en negro cercano de la superficie estelar. Los parámetros son: $T_{eff} = 30000[K]$, $R_* = 29 [R_\odot]$, $\log g = 3.45$, $k = 0.17$, $\alpha = 0.49$, $\delta = 0.09$, $\Omega = 0.00$ y $\gamma_{vis} = 1.0$.

2.6.2. Solución lenta

Solución lenta Ω

Curé [8] revisó la teoría de los vientos impulsados por radiación, considerando la rotación estelar. Descubrió una nueva familia de puntos críticos, además de las soluciones estándar, que

aparece cuando la rotación estelar es alta, cercana al $\sim 75\%$ de la velocidad de rotación crítica. Estas nuevas soluciones, llamadas soluciones Ω -slow, generan vientos con velocidades terminales menores y densidades mayores, y podrían explicar la formación de discos circunestelares en estrellas con alta rotación.

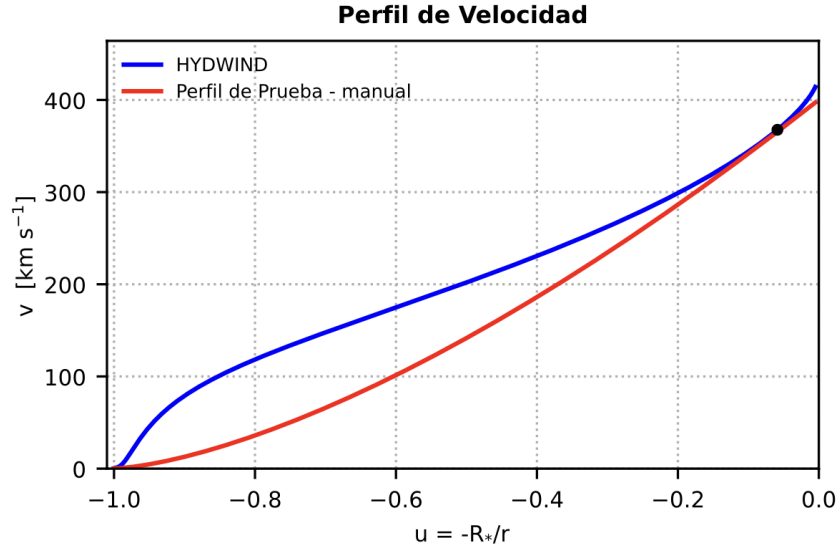


Figura 2.4: La curva azul corresponde al perfil de velocidad de una solución denominada Ω -slow, donde el punto crítico en negro se encuentra alejado de la superficie estelar. Los parámetros de esta solución son: $T_{eff} = 25000$ [K], $R_* = 10$ [$R_\odot$], $\log g = 3.5$, $k = 0.32$, $\alpha = 0.565$, $\delta = 0.02$, $\Omega = 0.8$ y $\gamma_{vis} = 1.0$.

Solución lenta δ

Curé et al. [10] investigaron numéricamente los vientos impulsados por radiación en estrellas de baja rotación, basándose en la existencia de la solución Ω -slow para estrellas de alta rotación. Buscaron nuevas soluciones que explicaran las discrepancias entre las predicciones y observaciones para supergigantes tipo B y A. Encontraron una nueva solución, llamada solución δ -slow, que aparece para ciertos parámetros estelares y del viento, especialmente cuando el parámetro δ es ligeramente mayor que 0.25. Esta solución, encontrada en ambientes ricos en hidrógeno, como el gas de hidrógeno puro, ofrece bajas velocidades terminales similares a la solución Ω -slow, pero con una menor pérdida de masa.

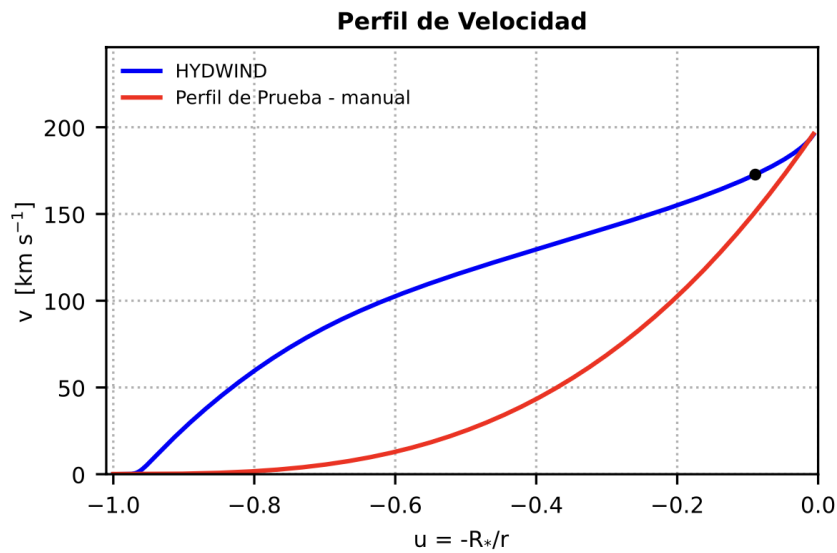


Figura 2.5: La curva azul corresponde al perfil de velocidad de una solución denominada δ -slow, donde el punto crítico en negro se encuentra alejado de la superficie estelar. Los parámetros de esta solución son: $T_{eff} = 10000 [K]$, $R_* = 60 [R_\odot]$, $\log g = 2.0$, $k = 0.37$, $\alpha = 0.49$, $\delta = 0.3$, $\Omega = 0.0$ y $\gamma_{vis} = 1.0$.

Se remarca que las soluciones presentes en las Figuras 4.5 y 4.6 están caracterizadas por velocidades terminales bajas y punto crítico lejos de la superficie estelar, al contrario de las soluciones rápidas.

Capítulo 3

Análisis Matemático

3.1. Aplicación hidrodinámica de los modelos CAK

En la introducción de este trabajo se ha mencionado que una de las dificultades de la ecuación (2.27) es el desarrollo de singularidades; sin embargo, existe otra complicación: la ecuación no está normalizada, es decir, la derivada de orden superior no está despejada explícitamente. Como resultado, los teoremas de existencia y unicidad no pueden ser aplicados directamente (para ilustrar esta problemática, se incluye un ejemplo sencillo de un problema de Cauchy en el anexo). Para superar estos obstáculos, podemos emplear herramientas como el teorema de la función implícita. A continuación, se presentan cambios de variables basados en Curé y Rial [11] que permiten agrupar las ecuaciones del modelo en términos de un sistema dinámico y facilitar una solución.

$$u = -R_*/r, \quad (3.1)$$

$$w = v/a, \quad (3.2)$$

$$w' = dw/du, \quad (3.3)$$

Entonces, la ecuación (2.27) se re-define de la siguiente forma:

$$F(u, w, w') \equiv \left(1 - \frac{1}{w^2}\right) ww' + \frac{2}{u} + A - a_{rot}^2(-u^{2\gamma_{vis}-1}) - \bar{C} f_D g(u)(w)^{-\delta} (ww')^\alpha, \quad (3.4)$$

donde A y $\bar{C}$ representan las constantes:

$$A = \frac{GM(1-\Gamma)}{a^2 R_*} = \frac{v_{esc}^2}{2a^2} = \frac{v_{crit}^2}{a^2} = \frac{a_{rot}^2}{\Omega^2}, \quad (3.5)$$

donde Γ es la relación entre el Scattering de Thompson de los electrones y la fuerza gravitatoria, v_{esc} es la velocidad de escape que es la mínima velocidad que un objeto debe alcanzar para liberarse de la atracción gravitacional de una estrella y v_{crit} es la velocidad de rotación crítica, que es la velocidad a la que una estrella que rota alcanza un punto donde la fuerza centrífuga en su ecuador es igual a la atracción gravitacional.

El valor propio es:

$$\bar{C} = C \left(\frac{\dot{M} D}{2\pi} \frac{10^{-11}}{a R_*^2} \right)^\delta (a^2 R_*)^{(\alpha-1)}, \quad (3.6)$$

donde a_{rot} se define como sigue:

$$a_{rot} = \frac{v_{rot}}{a} = \frac{\Omega}{a} \sqrt{\frac{GM(1-\Gamma)}{R}}. \quad (3.7)$$

Siguendo con la ecuación (3.4), la función $g(u)$ se define como:

$$g(u) = \left(\frac{u^2}{1 - \sqrt{1 - u^2}} \right)^\delta, \quad (3.8)$$

y la constante D está dado por:

$$D = \frac{1}{m_H} \frac{(1 + Z_{He} + Y_{He})}{(1 + A_{He} + Y_{He})} = \frac{n_E}{\rho}, \quad (3.9)$$

siendo Y_{He} la abundancia de helio en relación con el hidrógeno, Z_{He} es la cantidad de electrones libres proporcionados por el helio, A_{He} es el número de masa atómica del helio y m_H es la masa del protón.

3.2. Planteamiento de los modelos

Basándonos en los cambios de variables en [11] sobre la ecuación (2.27) en la descripción del problema físico, se ha derivado la ecuación (3.4). Esta debe admitir una solución con interpretación física, la cual comienza en la superficie estelar, cruza el punto crítico, y debe seguir alejándose de la superficie. En la superficie estelar, la ecuación diferencial debe cumplir una condición de contorno, a saber, la integral de profundidad óptica monocromática (ver [20], ecuación (48)):

$$\tau_{Phot} = \int_{R_*}^{\infty} \sigma_E \rho(r) dr = \frac{2}{3}. \quad (3.10)$$

Una condición de contorno numéricamente equivalente consiste en fijar la densidad de la superficie estelar en un valor específico,

$$\rho(R_*) = \rho_*. \quad (3.11)$$

Cuando la *condición de singularidad*,

$$\frac{\partial}{\partial w'} F(u, w, w') = F_{w'} = 0, \quad (3.12)$$

es satisfecha, la localización ($u = u_c$) de la variable independiente espacial corresponde a un punto crítico (o singular), es decir, se tiene que la ecuación (3.5) se anula derivando parcialmente con respecto al gradiente de la velocidad, lo cual hace que se pueda desarrollar su velocidad terminal lejos de la superficie estelar de forma constante.

Para obtener solución física, se impone lo que se denomina *condición de regularidad*:

$$\frac{d}{du} F(u, w, w') = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial w} w' = F_u + F_w w' = 0, \quad (3.13)$$

la cual induce que la velocidad del viento pueda extenderse hacia el infinito, con la anulación de la derivada parcial con respecto a la variable espacial independiente.

Para satisfacer las ecuaciones (3.4), (3.12), (3.13) y (3.10) o (3.11); el valor de $\bar{C}$ no puede ser arbitrario, es decir, la constante $\bar{C}$ es el *valor propio* de este problema no lineal. Así el modelo m-CAK se conforma por las ecuaciones (3.4), (3.10), (3.12) y (3.13).

Ahora bien, existen otros modelos derivados del m-CAK en base a simplificaciones en los parámetros Ω y f_D . Uno de estos es haciendo que el factor de corrección del disco finito sea igual a uno, i.e. $f_D = 1$, lo cuál nos induce al modelo CAK con rotación y viscosidad descrito por la siguiente función (junto con las condiciones anteriores):

$$F(u, w, w') \equiv \left(1 - \frac{1}{w^2}\right) ww' + \frac{2}{u} + A - a_{rot}^2(-u^{2\gamma_{vis}-1}) - \bar{C}g(u)(w)^{-\delta}(ww')^\alpha, \quad (3.14)$$

Notemos que la ecuación (3.14), hace alusión a la rotación en los vientos impulsados por radiación de estrellas calientes, lo cuál nos lleva a estudiar un caso aún más sencillo que en (3.14). Tomando $v_{rot} = 0$ lo cual implica $\Omega = 0$ se introduce el modelo CAK irrotacional descrito como sigue:

$$F(u, w, w') \equiv \left(1 - \frac{1}{w^2}\right) ww' + \frac{2}{u} + A - \bar{C}g(u)(w)^{-\delta}(ww')^\alpha. \quad (3.15)$$

Estos 3 modelos los resumimos en el Cuadro (3.1):

Modelo	Ecuación
m-CAK	$\left(1 - \frac{1}{w^2}\right) ww' + \frac{2}{u} + A - a_{rot}^2(-u^{2\gamma_{vis}-1}) - \bar{C}f_Dg(u)(w)^{-\delta}(ww')^\alpha = 0$
CAK	$\left(1 - \frac{1}{w^2}\right) ww' + \frac{2}{u} + A - a_{rot}^2(-u^{2\gamma_{vis}-1}) - \bar{C}g(u)(w)^{-\delta}(ww')^\alpha = 0$
CAK sin rotación	$\left(1 - \frac{1}{w^2}\right) ww' + \frac{2}{u} + A - \bar{C}g(u)(w)^{-\delta}(ww')^\alpha = 0$

Cuadro 3.1: Resumen de las ecuaciones para la descripción de los modelos CAK con la inclusión del parámetro γ_{vis} asociado a la viscosidad.

Nota: El Cuadro (3.1) hace énfasis a la dinámica, pero cada modelo debe ser considerado con las condiciones de regularidad, punto crítico o singular y de contorno.

3.3. Transformación de coordenadas y sistema de ecuaciones

En esta parte se presenta una transformación de la ecuación (3.4) en un sistema de de ecuaciones diferenciales acopladas, que están normalizadas y son numéricamente integrales (basándonos en [11]).

Sean

$$y = \frac{1}{2}w^2, \quad (3.16)$$

y

$$p = ww' = \frac{dy}{du}, \quad (3.17)$$

entonces la ecuación (3.4) puede ser escrita en forma general como sigue:

$$F(u, y, p) = \left(1 - \frac{1}{2y}\right) p + \frac{2}{u} + A - a_{rot}^2(-u^{2\gamma_{vis}-1}) - \bar{C}f_Dg(u)(2y)^{-\delta/2}p^\alpha \quad (3.18)$$

Por otro lado se tiene que:

$$\frac{d}{du}F(u, w, w') = F_u + F_w w' + F_{w'} w'' = 0. \quad (3.19)$$

Ahora calculemos por un lado F_w utilizando el Teorema de la Función Implícita [15], entonces:

$$F_w = \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial w} = \frac{\partial F}{\partial y} w + \frac{\partial F}{\partial p} w', \quad (3.20)$$

así se puede escribir $F_w w'$ como sigue:

$$F_w w' = F_y w w' + F_p (w')^2 = p F_y + F_p (w')^2, \quad (3.21)$$

mientras que por otro lado calculamos $F_{w'}$ de la siguiente forma:

$$F_{w'} = \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial w'} = F_p w, \quad (3.22)$$

entonces $F_{w'w''}$ es:

$$F_{w'w''} = F_p w w''. \quad (3.23)$$

La ecuación (3.19) nos queda de la forma:

$$F_u + p F_y + F_p (w')^2 + F_p w w'' = F_u + p F_y + F_p ((w')^2 + w w'') = 0. \quad (3.24)$$

Notemos que:

$$\frac{d}{du} p = \frac{d}{du} (w w') = (w')^2 + w w'', \quad (3.25)$$

por lo tanto, la ecuación (3.24) se puede reescribir como sigue:

$$F_u + p F_y + F_p ((w')^2 + w w'') = F_u + p F_y + F_p \frac{dp}{du} = 0, \quad (3.26)$$

lo cuál nos lleva a escribir la ecuación (3.18) en forma de diferenciales

$$dF(u, y, p) = (F_u + p F_y) du + F_p dp = 0. \quad (3.27)$$

En este punto se introduce una nueva variable independiente τ (sin significado físico) definida implícitamente como sigue:

$$du = F_p d\tau. \quad (3.28)$$

Dado que u y τ son variables independientes, tienen que estar relacionadas entre sí. Mientras $F_p \neq 0$, se puede escribir τ como función de u como:

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{d\tau} \left(\frac{d\tau}{du} \right) = p. \quad (3.29)$$

La ecuación (3.27) es representada en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{du}{d\tau} \equiv U = F_p, \quad (3.30)$$

$$\frac{dy}{d\tau} \equiv Y = p F_p, \quad (3.31)$$

$$\frac{dp}{d\tau} \equiv P = -(F_u + p F_y). \quad (3.32)$$

La ecuación (3.30) resulta directa desde (3.28); mientras que desde la ecuación (3.29) y utilizando (3.28), se tiene que $dy = p du$, entonces $dy = p F_p d\tau$, luego se obtuvo la ecuación

(3.31). Finalmente, desde la ecuación (3.27) se tiene que $F_p dp = -(F_u + pF_y) du$, nuevamente usando (3.28) se obtiene que $F_p dp = -(F_u + pF_y) F_p d\tau$, simplificando F_p de ambos miembros y despejando $dp/d\tau$ se obtiene la ecuación (3.32).

Una solución de este sistema, también es una solución de la ecuación de movimiento original, ya que, si cualquier condición inicial (u_0, y_0, p_0) satisface $F(u_0, y_0, p_0) = 0$, entonces una solución de las ecuaciones (3.30)-(3.32) verifica que $F(u(\tau), y(\tau), p(\tau)) = 0$.

La ventaja de este sistema de ecuaciones (3.30)-(3.32) sobre la ecuación diferencial de momento CAK (3.4) es que todas las derivadas están explícitamente dadas, es decir, ya no se tiene el problema de la no normalización. Es por esto que no hay necesidad de utilizar algoritmos de búsqueda de raíces para encontrar el valor del gradiente de velocidad. Además, se pueden utilizar métodos numéricos estándar (por ejemplo, Runge-Kutta [24]) para integrar este sistema.

Si calculamos las derivadas de forma explícita en el sistema (3.30)-(3.32) se obtiene:

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - \frac{1}{2y} - \bar{C} f_D g(u) (2y)^{-\delta/2} \alpha p^{\alpha-1} \quad (3.33)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = p - \frac{p}{2y} - \bar{C} f_D g(u) (2y)^{-\delta/2} \alpha p^\alpha, \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} = & \frac{2}{u^2} - a_{rot}^2 (2\gamma_{vis} - 1) u^{2\gamma_{vis}-2} + \bar{C} f_D (2y)^{-\delta/2} p^\alpha g'(u) \\ & + \frac{p^2}{2y^2} + \bar{C} f_D g(u) \delta p^{\alpha+1} (2y)^{-\delta/2-1}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Donde se definen las siguientes equivalencias $\frac{du}{d\tau} \equiv U$, $\frac{dy}{d\tau} \equiv Y$ y $\frac{dp}{d\tau} \equiv P$ para la simplificación de la notación en la siguiente sección.

3.3.1. Linealización y criterio de valores propios

A continuación se linealiza el sistema (3.33)-(3.35) (basándonos en [11]) en forma de diferenciales como sigue:

$$\begin{aligned} dU &= (U_u + pU_y) du + U_p dp, \\ dP &= (P_u + pP_y) du + P_p dp, \end{aligned} \quad (3.36)$$

ahora la matriz de derivadas parciales, B , es:

$$B = \begin{pmatrix} U_u + pU_y & U_p \\ P_u + pP_y & P_p \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Esta matriz provee información sobre las estructuras topológicas de los puntos críticos. Si consideramos $\bar{C}$ como un parámetro libre, los puntos críticos satisfacen:

$$\begin{aligned} F(u, y, p, \bar{C}) &= 0 \\ U(u, y, p, \bar{C}) &= 0 \\ P(u, y, p, \bar{C}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ahora como el número de incógnitas es más alto que el número de variables, podemos resolver para y_c , p_c , $\bar{C}$ en términos de u_c . Si bien $\bar{C}$ es una constante por determinar, esta depende del

punto crítico u_c , entonces ahora $\bar{C}$ es una variable que depende del punto crítico. Luego por la Regla de Cramer y el Teorema de la función implícita, obtenemos el gradiente de $\bar{C}$:

$$\frac{d\bar{C}}{du_c} = -\frac{1}{\Delta} \det \begin{pmatrix} F_y & F_p & F_u \\ U_y & U_p & U_u \\ P_y & P_p & P_u \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

donde Δ es definido por:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} F_y & F_p & F_{\bar{C}} \\ U_y & U_p & U_{\bar{C}} \\ P_y & P_p & P_{\bar{C}} \end{pmatrix}. \quad (3.40)$$

Cuando $u = u_c$, es decir, en el punto crítico, se tiene que $F_p = 0$ y $F_u = -pF_y$, luego la ecuación (3.39) se transforma en:

$$\frac{d\bar{C}}{du_c} = -\frac{1}{\Delta} \det \begin{pmatrix} F_y & 0 & -pF_y \\ U_y & U_p & U_u \\ P_y & P_p & P_u \end{pmatrix} = \frac{F_y}{\Delta} \det(B), \quad (3.41)$$

Luego si $\det(B) < 0$, entonces, el punto crítico corresponde a un punto tipo silla.

3.4. Antecedentes para la localización de candidatos a puntos singulares

Basándonos en los cambios de variables presentados por Curé [8] y en la construcción de Rodríguez [25], se presenta una forma de representación matemática para la identificación de la localización de los puntos críticos.

Sean,

$$\begin{aligned} Y &= ww' \\ Z &= \frac{w}{w'}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Desde la condición de singularidad (3.12), se tiene:

$$F_{w'} = \left(1 - \frac{1}{w^2}\right) w - \bar{C} \left(\frac{\partial f_D}{\partial w'} + \alpha \frac{f_D}{w'} \right) gw^{-\delta} (ww')^\alpha = 0. \quad (3.43)$$

Ahora como se tiene la condición de singularidad, se impone la condición de regularidad (3.13) en el punto crítico, luego

$$F_u = -\bar{C} \left(g \frac{\partial f_D}{\partial u} + f_D \frac{\partial g}{\partial u} \right) w^{-\delta} (ww')^\alpha - \frac{2}{u^2} + a_{rot}^2 (2\gamma_{vis} - 1) (-u)^{2\gamma_{vis}-2} \quad (3.44)$$

$$F_w = \left(1 + \frac{1}{w^2}\right) w' - \bar{C} \left(\frac{\partial f_D}{\partial w} + \alpha \frac{f_D}{\partial w} - \delta \frac{f_D}{w} \right) gw^{-\delta} (ww')^\alpha. \quad (3.45)$$

Con $f_D(u, Z) = f_1(u, Z)$ y utilizando (3.42), la ecuación (3.4) se presenta de la siguiente forma:

$$\left(1 - \frac{1}{YZ}\right) Y + \frac{2}{u} + A(1 - \Omega^2(-u)^{2\gamma_{vis}-1}) - \bar{C} f_1(u, Z) g(u) Z^{-\delta/2} Y^{\alpha-\delta/2} = 0. \quad (3.46)$$

De forma similar, la condición de singularidad (3.43) se convierte en:

$$\left(1 - \frac{1}{YZ}\right)Y - \bar{C}f_2(u, Z)g(u)Z^{-\delta/2}Y^{\alpha-\delta/2} = 0, \quad (3.47)$$

con

$$\bar{C} = \frac{1}{g(u)f_2} \left(1 - \frac{1}{YZ}\right) Z^{\delta/2}Y^{1-\alpha+\delta/2}, \quad (3.48)$$

donde $f_2(u, Z) = \alpha f_1(u, Z) + uZe(u, Z)$ y $e(u, Z) \equiv -\frac{w'}{uZ} \frac{\partial f_D}{\partial w'}$.

Entonces, la condición de regularidad (3.13) se transforma en:

$$\left(1 - \frac{1}{YZ}\right)Y - \frac{2Z}{u^2} + a_{rot}^2(2\gamma_{vis} - 1)(-u)^{2\gamma_{vis}-2}Z - \bar{C}f_3(u, Z)g(u)Z^{-\delta/2}Y^{\alpha-\delta/2} = 0, \quad (3.49)$$

con $f_3(u, Z) = (3u + Z)Ze(u, Z) + f_1(u, Z)(h(u)Z - \alpha - \delta)$ donde $h(u) \equiv \frac{1}{g(u)} \frac{dg(u)}{du}$.

Ahora, restando la ecuación (3.46) a la ecuación (3.47), se obtiene:

$$\bar{C}g(u)Z^{-\delta/2}Y^{\alpha-\delta/2} = \frac{1}{f_1 - f_2} \left(\frac{2}{u} + A - a_{rot}^2(-u)^{2\gamma_{vis}-1}\right). \quad (3.50)$$

Luego sustituyendo la ecuación (3.50) en la ecuación (3.47), se obtiene la siguiente expresión:

$$Y = \frac{1}{Z} + \frac{f_2}{f_1 - f_2} \left(\frac{2}{u} + A - a_{rot}^2(-u)^{2\gamma_{vis}-1}\right). \quad (3.51)$$

Considerando $0.5 < \gamma_{vis} < 1$, restando la ecuación (3.49) a la ecuación (3.47) y sustituyendo en la ecuación (3.50), se logra obtener la siguiente función:

$$R(u, Z) \equiv -\frac{2}{Z} + \frac{2Z}{u^2} - a_{rot}^2(-u)^{2\gamma_{vis}-1}Z + f_{123} \left(\frac{2}{u} + A - a_{rot}^2(-u)^{2\gamma_{vis}-1}\right), \quad (3.52)$$

donde $f_{123} = \frac{f_2 - f_3}{f_2 - f_1}$. Entonces, las raíces de esta función dan la ubicación de los puntos críticos. Esta función $R(u, Z)$ se implementa en Wolfram Mathematica, donde se grafica la superficie que describe. Al agregar el semiplano $R(u, Z) = 0$, se obtiene una curva de nivel que muestra la ubicación de todos los posibles candidatos a puntos críticos. A continuación se muestra un ejemplo de la función $R(u, Z)$:

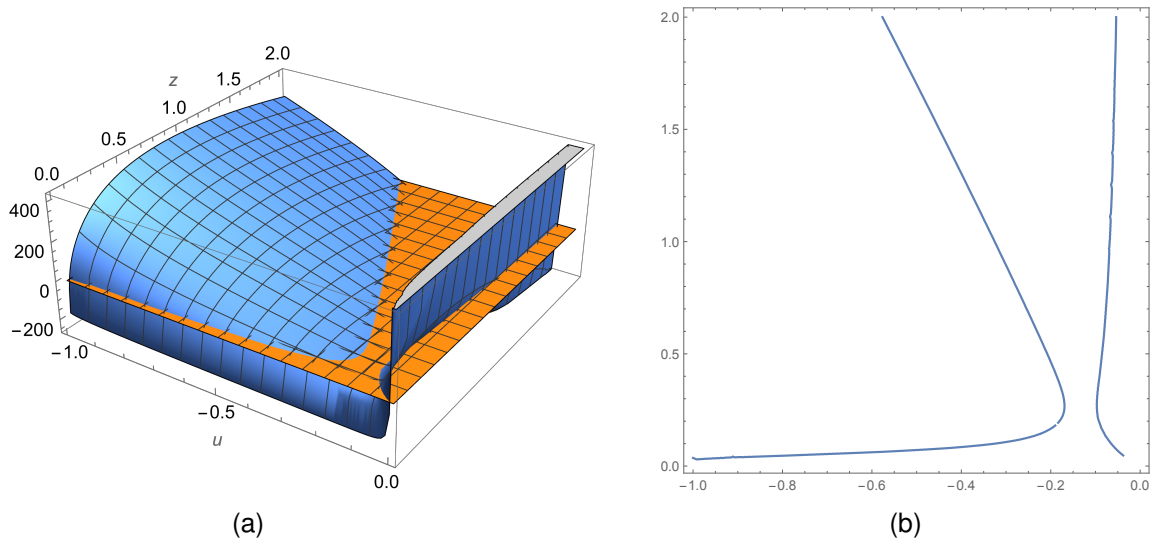


Figura 3.1: Parte (a): Superficie $R(u, Z)$ intersectada con el semiplano $R(u, Z) = 0$. Parte (b): Curva de nivel descrita por la intersección donde se localizan los puntos candidatos a puntos críticos.

En la Figura 3.1b, esta posee dos ramas; izquierda y derecha respectivamente. Dado el cambio de variables presentado en la ecuación (3.1), se tiene que cuando $u = -1$ (eje horizontal), la localización corresponde a la superficie estelar, mientras que cuando u se aproxima a 0, la localidad corresponde a la lejanía de la superficie estelar. Luego por las definiciones presentadas para los tipos de soluciones en el Capítulo 2, se observa que a la izquierda la Figura 3.1b se encuentran los candidatos a puntos singulares de las soluciones rápidas, mientras que en la parte derecha se encuentran los candidatos a puntos singulares de las soluciones lentas δ -slow y Ω -slow.

Curé y Araya [9] realizan un análisis topológico con la superficie $R(u, Z)$ usando una estrella típica de tipo B2.5 V con los siguientes parámetros estelares y de fuerza de línea: $T_{\text{eff}} = 20000$ [K], $\log g = 4.11$, $\frac{R}{R_{\odot}} = 4.0$, $k = 0.61$, $\alpha = 0.5$, $\delta = 0.0$ y $\gamma_{vis} = 1$. La condición de frontera (superficie) está fijada en $\rho_* = 8.7 \times 10^{-13} \text{ g/cm}^3$. Además, no se consideran la distorsión de la forma de la estrella causada por su alta velocidad de rotación y los efectos de oscurecimiento gravitacional.

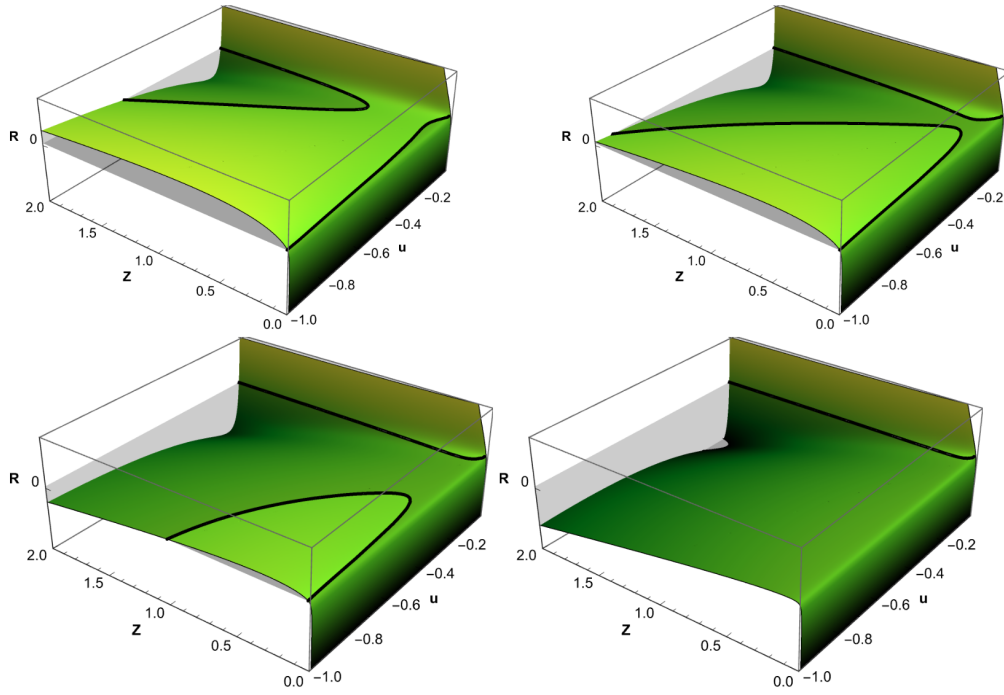


Figura 3.2: La función $R(u, Z)$ (topología) de la teoría m-CAK en función de Ω : $\Omega = 0.3$ (panel superior izquierdo), $\Omega = 0.5$ (panel superior derecho), $\Omega = 0.7$ (panel inferior izquierdo) y $\Omega = 0.9$ (panel inferior derecho). El plano $R(u, Z) = 0$ se muestra en gris claro, y su intersección con la superficie $R(u, Z)$ (localización de puntos críticos) se traza con una línea negra (imagen tomada de [9]).

Se debe notar cómo a valores distintos de Ω , se produce una bifurcación en las raíces de la función $R(u, Z)$ y luego deja de existir la solución rápida en el panel inferior derecho.

En el capítulo de resultados, se estudiará la variación de estos puntos críticos en función de la variación de los parámetros δ y Ω .

Capítulo 4

Resultados para el perfil de velocidad del viento estelar

En este capítulo, se comienza por examinar los distintos tipos de soluciones que se pueden obtener utilizando el programa HYDWIND, diseñado para resolver la ecuación de gobierno (2.27). Es crucial diferenciar entre soluciones lentas y rápida, ya que la naturaleza de estas soluciones depende fundamentalmente de la ubicación del punto crítico en el sistema. Esta distinción es esencial para comprender la dinámica subyacente y el comportamiento a largo plazo de los vientos estelares modelados.

4.1. Procedimiento numérico

Desde el programa HYDWIND, necesitamos aplicar una forma de buscar nuevas soluciones además de dar la ubicación de los puntos críticos en función de la variación los parámetros $\delta \in [0.00, 0.35]$ y $\Omega \in [0.95, 0.99]$, con paso de evolución de 0.05 y 0.01 respectivamente. Cabe mencionar que se han presentado dificultades numéricas para la obtención de soluciones considerando valores de $\Omega \leq 0.94$. Es por esto que se considera el intervalo mencionado.

Una forma de obtener resultados, es con la opción *file* dentro del manual para el programa desarrollado por Araya y Curé [3], donde esta opción usa como solución de prueba o “trial” un perfil de velocidad anterior encontrado por el mismo programa, es decir, una solución anterior que halla convergido para una cierta configuración de los parámetros cercana a la buscada.

Puede que cuando se realice un intento de búsqueda de solución, el proceso no termine, es decir, no converge a una nueva solución; en el caso de que sí termine, ahora poseemos un archivo *output* que contiene información sobre el valor propio, el cuál se utilizará para buscar una nueva solución con el archivo de salida que obtuvo el programa antes mencionado.

El procedimiento numérico es el siguiente:

- 1 Crear un nuevo directorio para almacenar los archivos de entrada y de salida.
- 2 Rescatar el archivo *...-for007.dat* de otra solución calculada y llevarlo al nuevo directorio.
- 3 Cambiar nombre al archivo *...-for007.dat* a *hydwind_in.dat*.
- 4 En el archivo *for011.dat* cambiar la opción *manual* por *file*.
- 5 Rescatar del archivo *...-for002.dat* de la solución anterior, el valor calculado al valor propio, y escribirlo en el archivo *for011.dat* actual del nuevo directorio.
- 6 Variar los parámetros que se estime conveniente para la búsqueda de una nueva solución.

7 Ejecutar el código HYDWIND.

7.1 Si la ejecución termina exitosamente (converge), ejecutar archivo python para la realización de los gráficos del perfil de velocidad.

7.2 Tomar esta nueva solución como *input* para buscar una nueva, es decir repetir proceso.

8 En caso de que no termine, volver al punto 6 y continuar.

4.2. Resultados de la literatura

Basándonos en la búsqueda de velocidades terminales bajas de Rodríguez [25], se presentan los resultados mostrados en los siguientes cuadros, donde se exhiben soluciones tanto rápidas como lentas.

Para la construcción de este cuadro en la Figura 4.1, la autora considera la siguiente configuración de parámetros:

$T_{eff} [K]$	$R_* [R_\odot]$	$\log g$	k	α	δ
20000	4.0	4.11	0.61	0.5	0.0

γ_{vis}	Ω							
	0.60		0.70		0.75		0.80	
	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$ /yr]	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$ /yr]	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$ /yr]	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$ /yr]
1.00	1426	1.590E-09	1184	2.011E-09	487.8	2.149E-09	465.9	2.153E-09
0.95	1431	1.592E-09	1193	2.015E-09	475.6	2.168E-09	452.8	2.176E-09
0.90	1437	1.594E-09	1202	2.020E-09	462.3	2.194E-09	437.4	2.203E-09
0.85	1443	1.595E-09	1213	2.024E-09	449.3	2.232E-09	422.7	2.246E-09
0.80	1450	1.597E-09	1225	2.029E-09	428.8	2.248E-09	406.3	2.304E-09
0.75	1458	1.599E-09	1239	2.033E-09	1096	2.390E-09	390.3	2.392E-09
0.70	1467	1.601E-09	1254	2.038E-09	1118	2.398E-09	374.4	2.528E-09
0.65	1477	1.603E-09	1272	2.042E-09	1142	2.406E-09	363.0	2.697E-09
0.60	1489	1.604E-09	1291	2.047E-09	1167	2.414E-09	1020	2.978E-09
0.55	1503	1.606E-09	1313	2.051E-09	1196	2.422E-09	1059	2.993E-09
0.50	1520	1.608E-09	1339	2.056E-09	1228	2.429E-09	1100	3.008E-09

Figura 4.1: Resultados para el modelo de estrella tipo B2.5 V con diferentes valores de Ω y γ_{vis} , considerando $\alpha = 0.50$. Las soluciones rápidas están en cursiva, y las Ω -slow en fuente normal (cuadro tomado de [25]).

Se omiten los resultados para $\Omega = 0.50$, ya que son solo soluciones rápidas con valores de $\dot{M}$ y v_∞ similares a los de $\Omega = 0.60$.

γ_{vis}	Ω							
	0.85		0.90		0.95		0.99	
	v_{∞} [km/s]	$\dot{M}$ [$M_{\odot}/yr$]	v_{∞} [km/s]	$\dot{M}$ [$M_{\odot}/yr$]	v_{∞} [km/s]	$\dot{M}$ [$M_{\odot}/yr$]	v_{∞} [km/s]	$\dot{M}$ [$M_{\odot}/yr$]
1.00	445.6	2.161E-09	425.9	2.167E-09	407.0	2.173E-09	393.1	2.180E-09
0.95	430.8	2.185E-09	409.8	2.193E-09	390.1	2.203E-09	375.2	2.212E-09
0.90	414.5	2.218E-09	392.2	2.231E-09	370.3	2.239E-09	355.2	2.255E-09
0.85	397.8	2.264E-09	373.7	2.282E-09	350.9	2.300E-09	334.0	2.316E-09
0.80	379.5	2.331E-09	342.9	2.243E-09	328.4	2.386E-09	310.8	2.408E-09
0.75	360.2	2.428E-09	332.5	2.471E-09	305.4	2.511E-09	285.7	2.549E-09
0.70	340.8	2.583E-09	310.2	2.653E-09	280.2	2.722E-09	258.3	2.784E-09
0.65	322.9	2.841E-09	292.0	2.892E-09	258.5	3.001E-09	234.2	3.105E-09
0.60	323.6	2.857E-09	287.2	2.969E-09	252.4	3.096E-09	221.8	3.019E-09
0.55	892.2	3.975E-09	258.1	5.285E-09	200.2	6.363E-09	155.4	7.677E-09
0.50	947.8	4.009E-09	761.4	6.119E-09	517.3	1.302E-08	asound < v(0)	

Figura 4.2: Continuación del cuadro anterior presentado en la Figura 4.1 para el resto de valores de Ω , donde el término asound < v(0) indica a un mensaje generado por el programa cuando la velocidad de la fotosfera es mayor que la velocidad isotérmica del sonido (cuadro tomado de [25]).

γ_{vis}	Ω							
	0.60		0.70		0.75		0.80	
	v_{∞} [km/s]	$\dot{M}$ [$M_{\odot}/yr$]	v_{∞} [km/s]	$\dot{M}$ [$M_{\odot}/yr$]	v_{∞} [km/s]	$\dot{M}$ [$M_{\odot}/yr$]	v_{∞} [km/s]	$\dot{M}$ [$M_{\odot}/yr$]
1.00	1176	4.590E-10	454.4	5.617E-10	433.7	5.633E-10	413.9	5.650E-10
0.95	1182	4.597E-10	443.5	5.667E-10	422.0	5.697E-10	401.4	5.727E-10
0.90	1188	4.604E-10	433.2	5.750E-10	409.9	5.784E-10	386.8	5.807E-10
0.85	1195	4.612E-10	421.5	5.847E-10	397.0	5.903E-10	373.5	5.961E-10
0.80	1204	4.619E-10	994.7	6.172E-10	384.2	6.072E-10	357.5	6.130E-10
0.75	1213	4.626E-10	1013	6.191E-10	371.2	6.324E-10	343.4	6.434E-10
0.70	1223	4.633E-10	1032	6.211E-10	359.3	6.707E-10	328.7	6.886E-10
0.65	1235	4.641E-10	1053	6.231E-10	933.0	7.601E-10	316.6	7.658E-10
0.60	1249	4.648E-10	1076	6.250E-10	966.1	7.637E-10	310.6	9.085E-10
0.55	1265	4.655E-10	1101	6.270E-10	999.7	7.672E-10	879.9	9.925E-10
0.53	1275	4.656E-10	1115	6.275E-10	1016	7.684E-10	900.8	9.952E-10
0.5103	1282	4.659E-10	1126	6.283E-10	1031	7.698E-10	919.3	9.980E-10
0.50	1283	4.662E-10	1129	6.289E-10	1036	7.707E-10	926.6	9.996E-10

Figura 4.3: Para un valor de $\alpha = 0.45$, se presenta el cuadro presentado en la Figura 4.1 con los resultados correspondientes. Donde se agregan los valores 0.53 y 0.5103 para la columna asociada al parámetro γ_{vis} (cuadro tomado de [25]).

γ_{vis}	Ω							
	0.85		0.90		0.95		0.99	
	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$ /yr]	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$ /yr]	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$ /yr]	v_∞ [km/s]	$\dot{M}$ [$M_\odot$ /yr]
1.00	395.4	5.675E-10	377.7	5.699E-10	360.9	5.722E-10	348.8	5.745E-10
0.95	381.5	5.756E-10	362.1	5.778E-10	344.9	5.819E-10	332.1	5.850E-10
0.90	366.2	5.859E-10	346.5	5.909E-10	327.8	5.955E-10	313.8	5.982E-10
0.85	350.9	6.018E-10	329.6	6.078E-10	309.1	6.139E-10	294.5	6.188E-10
0.80	333.9	6.234E-10	311.1	6.329E-10	289.7	6.421E-10	273.9	6.501E-10
0.75	317.3	6.572E-10	291.5	6.703E-10	268.1	6.844E-10	250.5	6.959E-10
0.70	299.8	7.098E-10	271.3	7.315E-10	245.1	7.543E-10	226.0	7.755E-10
0.65	283.1	8.014E-10	250.6	8.382E-10	219.2	8.733E-10	199.6	9.280E-10
0.60	271.1	9.801E-10	233.3	1.070E-09	194.6	1.159E-09	170.2	1.288E-09
0.55	732.8	1.401E-09	226.2	1.701E-09	175.4	2.140E-09	137.1	2.705E-09
0.53	762.0	1.408E-09	584.7	2.338E-09	174.1	3.362E-09	122.6	5.166E-09
0.5103	787.0	1.415E-09	623.4	2.362E-09	401.9	5.888E-09	111.8	2.045E-08
0.50	797.5	1.419E-09	639.0	2.375E-09	430.4	5.985E-09	asound < v(0)	

Figura 4.4: Continuación del cuadro anterior presentado en la Figura 4.3 para el resto de valores de Ω , considerando $\alpha = 0.45$. El término asound < $v(0)$ indica a un mensaje generado por el programa cuando la velocidad de la fotosfera es mayor que la velocidad isotérmica del sonido (cuadro tomado de [25]).

Notemos que Rodriguez [25] encuentra tanto soluciones rápidas como lentas (rama Ω -slow). Sin embargo, remarca que los modelos toman en cuenta valores de δ en el rango $0.00 \leq \delta \leq 0.05$, considerando que cuando $\delta \simeq 0$, los cambios en la ionización a lo largo del viento son despreciables. Por otro lado, cuando se emplean diferentes valores de α , se presentaron dificultades numéricas para obtener soluciones al considerar valores de $\alpha \leq 0.4$, luego se limitó a considerar valores de α mayores que 0.4. Adicionalmente, la autora remarca que para diferentes valores de k , este parámetro apenas afecta a los resultados y su variación puede despreciarse.

El interés de este trabajo en el estudio de Rodriguez [25], recae en la consideración de valores altos para los cambios de la ionización δ y velocidad de rotación Ω , teniendo en cuenta un modelo de viscosidad (usando $\gamma_{vis} = 0.52$).

4.2.1. Rama de soluciones lentas

Dado que se desea encontrar y analizar soluciones con velocidades terminales bajas y el procedimiento numérico utiliza una solución previa como condición inicial, es recomendable remarcar cuáles soluciones se pueden llegar a tomar como perfil de prueba.

En el Capítulo 3 remarcamos las soluciones Ω -slow y δ -slow, las cuales se pueden obtener con los siguientes parámetros:

Para la solución Ω -slow

T_{eff} [K]	R_* [$R_\odot$]	$\log g$	k	α	δ	Ω	γ_{vis}
25000	10	3.50	0.32	0.56	0.0	0.8	1

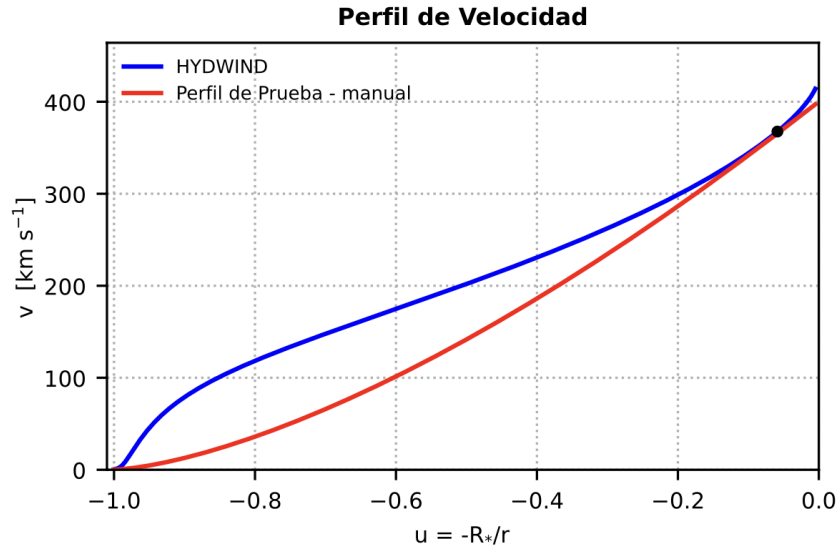


Figura 4.5: La curva azul es el perfil de velocidad de una solución Ω -slow medida en $km\ s^{-1}$ en función de la variable radial inversa u . El punto negro indica la localización del punto crítico.

Los resultados de la solución presentada en la Figura 4.5 son:

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
5.08×10^{-01}	$4.14 \times 10^{+02}$	2.45×10^{-01}	32.53	17.02

Remarcamos que la curva roja presente en la Figura 4.5 (así con todas las demás figuras de estas características presentadas en este trabajo), representa el perfil inicial de velocidad que va a converger a la curva azul. Así como el punto crítico, lejano a la superficie estelar, localizado a más de $17 [R_\odot]$.

Mientras que para la solución δ -slow caracterizada por ser sin rotación, los parámetros utilizados son:

$T_{eff} [K]$	$R_* [R_\odot]$	$\log g$	k	α	δ	Ω	γ_{vis}
10000	60	2.0	0.37	0.49	0.03	0.0	1

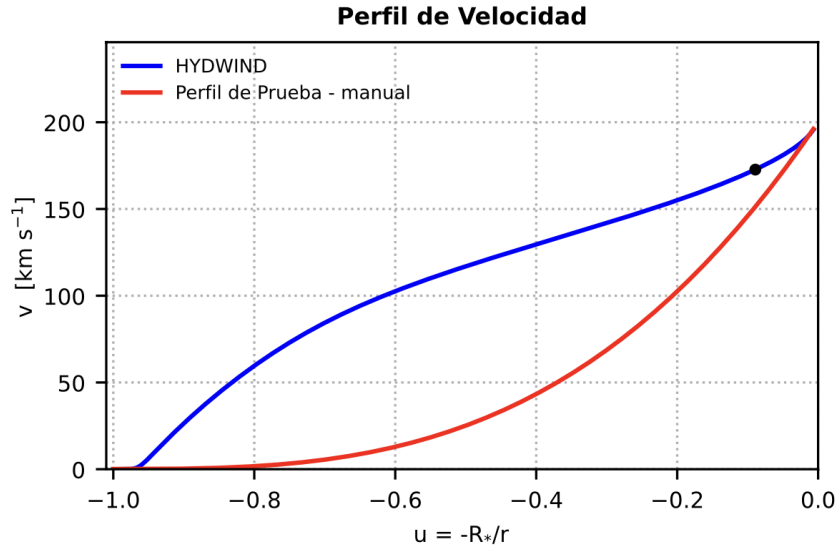


Figura 4.6: La curva azul presentada es el perfil de velocidad de una solución δ -slow medida en $km\ s^{-1}$ en función de la variable radial inversa u . El punto negro indica la localización del punto crítico.

con los siguientes resultados:

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
4.34×10^{-05}	$1.96 \times 10^{+02}$	4.31×10^{-01}	66.15	11.23

Notemos que estas dos soluciones, se tienen para $\gamma_{vis} = 1$ (ver Capítulo 3) cuando se tiene conservación del momentum angular.

Ahora se tiene otra solución llamada *GammaVis*, la cual corresponde a un caso casi kepleriano ($\gamma_{vis} = 0.52$), la cuál viene a tomar los siguientes parámetros:

$T_{eff}\ [K]$	$R_*\ [R_\odot]$	$\log g$	k	α	δ	Ω	γ_{vis}
21000	4.5	4.0	0.32	0.5	0.0	0.99	0.52

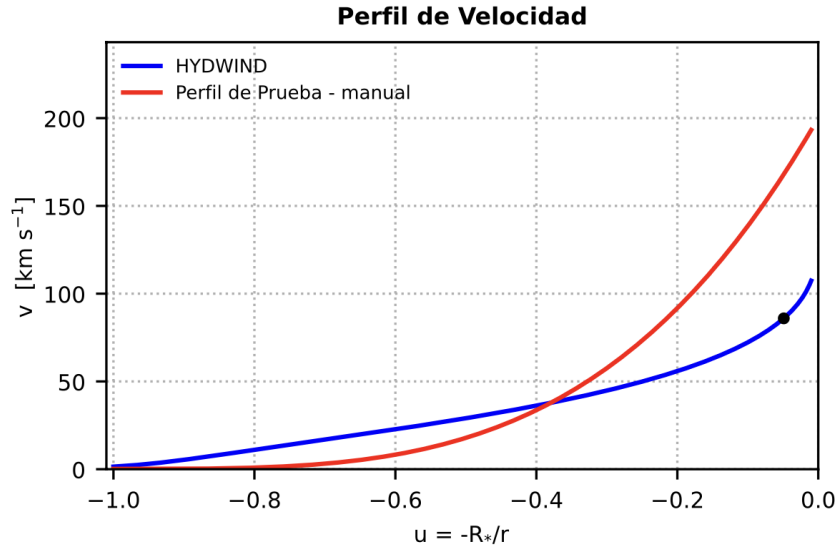


Figura 4.7: La curva azul presentada es el perfil de velocidad de la solución *GammaVis* medida en $km\ s^{-1}$ en función de la variable radial inversa u . El punto negro indica la localización del punto crítico.

con sus respectivos resultados:

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
1.45×10^{00}	$1.07 \times 10^{+02}$	1.42×10^{-02}	20.37	20.45

4.3. Soluciones numéricas rápidas

En esta sección se presentan algunas soluciones rápidas que se han encontrado en este trabajo

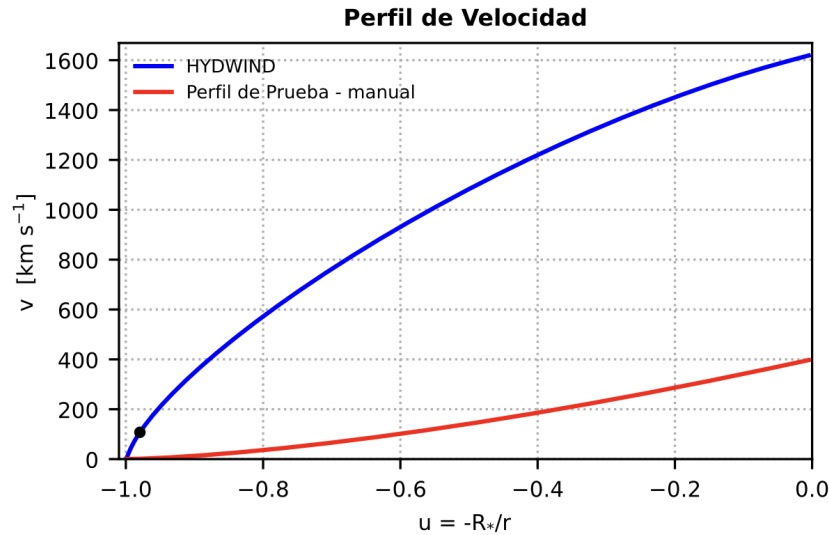


Figura 4.8: La curva azul representa el perfil de velocidad para una solución rápida o estándar. El punto crítico se presenta en negro. Parámetros utilizados: $T_{eff} = 20000\ [K]$, $R_* = 10\ [R_\odot]$, $\log g = 4.11$, $k = 0.61$, $\alpha = 0.4$, $\delta = 0.04$, $\Omega = 0.49$ y $\gamma_{vis} = 1.0$.

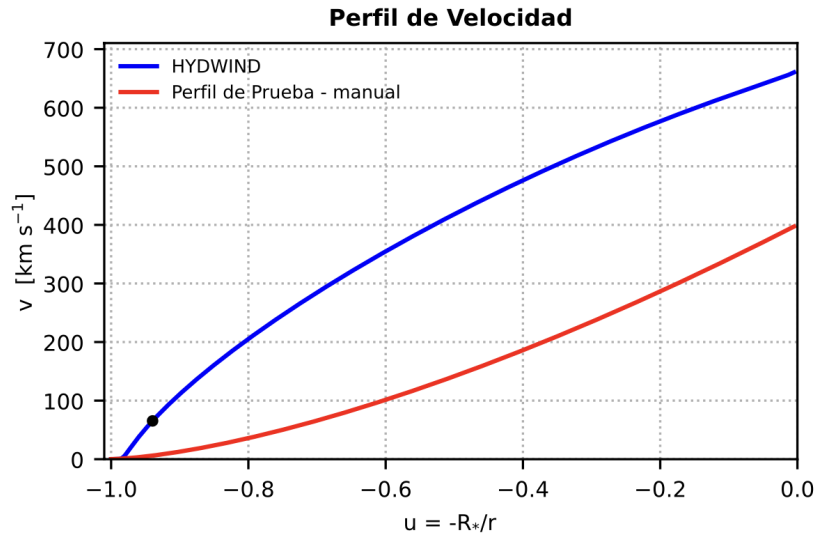


Figura 4.9: La curva azul representa el perfil de velocidad para una solución rápida o estándar. El punto crítico se presenta en negro. Parámetros utilizados: $T_{eff} = 20000$ [K], $R_* = 4$ [$R_\odot$], $\log g = 4.11$, $k = 0.61$, $\alpha = 0.34$, $\delta = 0.04$, $\Omega = 0.73$ y $\gamma_{vis} = 0.5$.

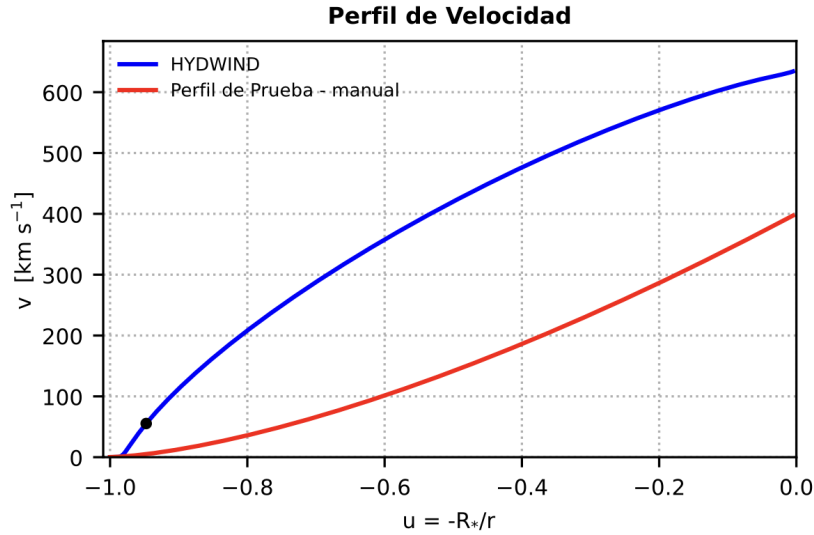


Figura 4.10: La curva azul representa el perfil de velocidad para una solución rápida o estándar. El punto crítico se presenta en negro. Los parámetros utilizados son: $T_{eff} = 20000$ [K], $R_* = 4$ [$R_\odot$], $\log g = 4.11$, $k = 0.61$, $\alpha = 0.34$, $\delta = 0.34$, $\Omega = 0.77$ y $\gamma_{vis} = 0.55$.

Cabe destacar que al ser soluciones rápidas (o estándar), estas 3 soluciones previas, se ven caracterizadas por un punto crítico cercano a la superficie estelar y velocidades terminales altas, donde en la Figura 4.8, la velocidad terminal $v_\infty = 1619$ [km/s] y el punto crítico está localizado a $1.02 R_\odot$. Estas soluciones se han obtenido con la opción *manual* del código HYDWIND, que hace alusión a considerar una función analítica como condición inicial (más detalles en [3]). En la siguiente sección se presentarán las soluciones lentas encontradas desde el procedimiento numérico indicado en la Sección 4.1.

4.4. Soluciones numéricas lentas

En esta sección, se abordan las soluciones que fueron obtenidas en el plano ecuatorial, empleando el procedimiento previamente presentado.

Dado que Rodríguez [25] señala los problemas numéricos para $\alpha \leq 0.4$ y la despreciabilidad del valor de k , en este trabajo se estudiará la influencia de valores altos de ionización δ en el intervalo $[0, 0.35]$ con incrementos de 0.05, y valores altos de rotación Ω en el intervalo $[0.95, 0.99]$ con decrementos de 0.01, considerando un caso casi kepleriano ($\gamma_{vis} = 0.52$).

Luego tomando como perfil de prueba la solución presentada en la Figura 4.7, se inicia el procedimiento numérico, generando así, los Cuadros 4.1 y 4.2.

$\alpha = 0.5, k = 0.32, \gamma_{vis} = 0.52$							
δ	Ω	$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c	u_c
0.05	0.99	$1.54 \times 10^{+00}$	$1.04 \times 10^{+02}$	1.51×10^{-02}	21.30	21.82	-4.583×10^{-02}
0.1	0.99	$1.67 \times 10^{+00}$	$1.0 \times 10^{+02}$	1.64×10^{-02}	22.19	22.92	-4.362×10^{-02}
0.15	0.99	$1.87 \times 10^{+00}$	$9.71 \times 10^{+01}$	1.84×10^{-02}	23.01	24.14	-4.142×10^{-02}
0.2	0.99	$2.24 \times 10^{+00}$	$9.38 \times 10^{+01}$	2.19×10^{-02}	23.78	25.50	-3.921×10^{-02}
0.25	0.99	$2.89 \times 10^{+00}$	$9.06 \times 10^{+01}$	2.83×10^{-02}	24.47	26.24	-3.811×10^{-02}
0.3	0.99	$4.30 \times 10^{+00}$	$8.77 \times 10^{+01}$	4.21×10^{-02}	25.11	27.85	-3.591×10^{-02}
0.35	0.99	$8.24 \times 10^{+00}$	$8.58 \times 10^{+01}$	8.06×10^{-02}	25.82	28.73	-3.481×10^{-02}
0.0	0.98	$1.21 \times 10^{+00}$	$1.26 \times 10^{+02}$	1.19×10^{-03}	22.28	19.90	-5.024×10^{-02}
0.05	0.98	$1.23 \times 10^{+00}$	$1.22 \times 10^{+02}$	1.20×10^{-02}	23.56	20.82	-4.803×10^{-02}
0.1	0.98	$1.27 \times 10^{+00}$	$1.18 \times 10^{+02}$	1.24×10^{-02}	24.82	21.82	-4.583×10^{-02}
0.15	0.98	$1.33 \times 10^{+00}$	$1.14 \times 10^{+02}$	1.30×10^{-02}	26.03	22.92	-4.362×10^{-02}
0.2	0.98	$1.43 \times 10^{+00}$	$1.11 \times 10^{+02}$	1.40×10^{-02}	27.20	24.14	-4.142×10^{-02}
0.25	0.98	$1.62 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.58×10^{-02}	28.29	25.50	-3.921×10^{-02}
0.3	0.98	$1.98 \times 10^{+00}$	$1.03 \times 10^{+02}$	1.94×10^{-02}	29.31	27.02	-3.701×10^{-02}
0.35	0.98	$2.86 \times 10^{+00}$	$9.95 \times 10^{+01}$	2.79×10^{-02}	30.26	27.85	-3.591×10^{-02}
0.0	0.97	$1.05 \times 10^{+00}$	$1.45 \times 10^{+02}$	1.02×10^{-02}	24.00	19.48	-5.134×10^{-02}
0.05	0.97	$1.02 \times 10^{+00}$	$1.40 \times 10^{+02}$	1.00×10^{-02}	25.59	20.35	-4.914×10^{-02}
0.1	0.97	$1.01 \times 10^{+00}$	$1.36 \times 10^{+02}$	9.84×10^{-03}	27.19	21.31	-4.693×10^{-02}
0.15	0.97	9.95×10^{-01}	$1.31 \times 10^{+02}$	9.73×10^{-03}	28.78	22.36	-4.473×10^{-02}
0.2	0.97	9.94×10^{-01}	$1.27 \times 10^{+02}$	9.72×10^{-03}	30.33	23.52	-4.252×10^{-02}
0.25	0.97	$1.01 \times 10^{+00}$	$1.22 \times 10^{+02}$	9.88×10^{-03}	31.82	24.80	-4.032×10^{-02}
0.3	0.97	$1.06 \times 10^{+00}$	$1.18 \times 10^{+02}$	1.03×10^{-02}	33.24	26.24	-3.811×10^{-02}
0.35	0.97	$1.18 \times 10^{+00}$	$1.13 \times 10^{+02}$	1.15×10^{-02}	34.55	27.02	-3.701×10^{-02}

Cuadro 4.1: Resultados de las soluciones numéricas encontradas para distintos valores de δ y Ω considerando valores fijos de $\alpha = 0.5$ y $\gamma_{vis} = 0.52$. Presentación de los resultados: v_0 , la velocidad inicial; v_∞ , la velocidad terminal; $\dot{M}$, la tasa de pérdida de masa; $\bar{C}$, el valor propio del problema; r_c , el radio crítico asociado al punto crítico u_c .

$\alpha = 0.5, k = 0.32, \gamma_{vis} = 0.52$							
δ	Ω	$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c	u_c
0.0	0.96	9.23×10^{-01}	$1.63 \times 10^{+02}$	9.02×10^{-03}	25.56	19.48	-5.134×10^{-02}
0.05	0.96	8.77×10^{-01}	$1.58 \times 10^{+02}$	8.57×10^{-03}	27.46	20.35	-4.914×10^{-02}
0.1	0.96	8.30×10^{-01}	$1.53 \times 10^{+02}$	8.11×10^{-03}	29.38	21.31	-4.693×10^{-02}
0.15	0.96	7.82×10^{-01}	$1.48 \times 10^{+02}$	7.64×10^{-03}	31.31	22.36	-4.473×10^{-02}
0.2	0.96	7.33×10^{-01}	$1.42 \times 10^{+02}$	7.16×10^{-03}	33.24	23.52	-4.252×10^{-02}
0.25	0.96	6.81×10^{-01}	$1.37 \times 10^{+02}$	6.66×10^{-03}	35.12	24.24	-4.125×10^{-02}
0.3	0.96	6.25×10^{-01}	$1.32 \times 10^{+02}$	6.11×10^{-03}	36.93	25.50	-3.921×10^{-02}
0.35	0.96	5.61×10^{-01}	$1.27 \times 10^{+02}$	5.49×10^{-03}	38.63	27.02	-3.701×10^{-02}
0.0	0.95	8.26×10^{-01}	$1.80 \times 10^{+02}$	8.08×10^{-03}	27.01	19.07	-5.244×10^{-02}
0.05	0.95	7.63×10^{-01}	$1.74 \times 10^{+02}$	7.46×10^{-03}	29.22	19.48	-5.134×10^{-02}
0.1	0.95	7.02×10^{-01}	$1.69 \times 10^{+02}$	6.86×10^{-03}	31.42	20.82	-4.803×10^{-02}
0.15	0.95	6.35×10^{-01}	$1.63 \times 10^{+02}$	6.21×10^{-03}	33.69	21.82	-4.583×10^{-02}
0.2	0.95	5.63×10^{-01}	$1.57 \times 10^{+02}$	5.51×10^{-03}	35.96	22.92	-4.362×10^{-02}
0.25	0.95	4.85×10^{-01}	$1.52 \times 10^{+02}$	4.75×10^{-03}	38.22	24.24	-4.125×10^{-02}
0.3	0.95	3.98×10^{-01}	$1.46 \times 10^{+02}$	3.89×10^{-03}	40.42	25.50	-3.921×10^{-02}
0.35	0.95	2.97×10^{-01}	$1.40 \times 10^{+02}$	2.90×10^{-03}	42.50	26.24	-3.811×10^{-02}
0.0	0.945	7.86×10^{-01}	$1.89 \times 10^{+02}$	7.69×10^{-03}	27.70	19.07	-5.244×10^{-02}
0.0	0.9406	7.54×10^{-01}	$1.97 \times 10^{+02}$	7.37×10^{-03}	28.29	10.93	-9.146×10^{-02}

Cuadro 4.2: Continuación del Cuadro 4.1 para el resto de valores de Ω 0.96, 0.95 y el límite de los experimentos donde el programa HYDWIND deja de converger cercano a 0.94.

Notemos además que por defecto el programa HYDWIND, los resultados los entrega a 3, 4 cifras significativas dependiendo del tipo de resultado (velocidades, valor propio, etc.), pero el camino a la determinación del valor de Ω más bajo que se ha logrado obtener, se está encontrando con 5 cifras significativas.

Remarcamos que la atención será focalizada en la solución *GammaVis*, usándola como perfil de prueba para inicializar la variación paramétrica, centrada en los parámetros δ y Ω . Rodríguez [25] menciona que, como consecuencia del transporte de momento angular a lo largo del viento, debido a la presencia de viscosidad, cuando $\gamma_{vis} = 0.5$, el viento rota de forma kepleriana, es decir, el momento angular del viento decrece con el radio como $r^{-1/2}$.

Retomamos el análisis del valor propio $\bar{C}$, mediante el cual se guarda la relación entre la pérdida de masa $\dot{M}$ y la luminosidad L como sigue (recordando las ecuaciones (2.23) y (3.6)):

$$C = \Gamma G M k \left(\frac{4\pi}{\sigma_e v_{th} \dot{M}} \right)^\alpha, \quad (4.1)$$

con

$$\bar{C} = C \left(\frac{\dot{M} D 10^{-11}}{2\pi \frac{a R_*^2}{a R_*^2}} \right)^\delta (a^2 R_*)^{(\alpha-1)}. \quad (4.2)$$

Como se tienen velocidades de rotación Ω altas en todos los casos, se propone presentar con más detalle el comportamiento del perfil de velocidad del viento para valores de δ mayores

a 0.25 y sus incrementos para los valores fijos de Ω . Retomando los parámetros fijos que se consideran: $T_{eff} = 21000 [K]$, $R_* = 4.5 [R_\odot]$, $\log g = 4.00$, $k = 0.32$, $\alpha = 0.5$ y $\gamma_{vis} = 0.52$. Los resultados de la primera solución son los siguientes:

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
$2.89 \times 10^{+00}$	$9.06 \times 10^{+01}$	2.83×10^{-02}	24.47	26.24

Cuadro 4.3: Resultados del perfil de velocidad utilizando $\delta = 0.25$ y $\Omega = 0.99$.

El comportamiento de la solución numérica se presenta en la siguiente figura:

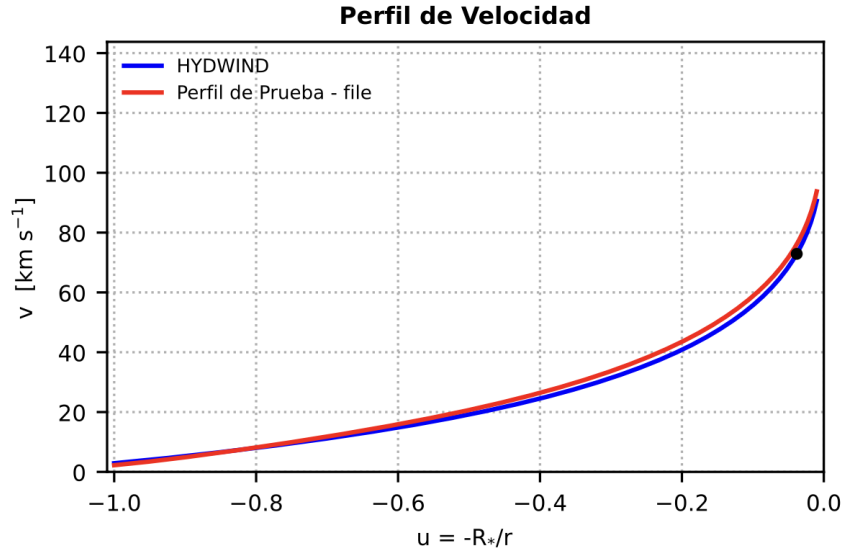


Figura 4.11: En la curva azul se presenta el perfil de velocidad de una solución lenta, en rojo; el perfil de prueba, en negro; el punto crítico. Los parámetros utilizados son $\delta = 0.25$ y $\Omega = 0.99$.

Se remarca que la velocidad terminal es más baja que en la condición inicial, además vemos que la dinámica del perfil de velocidad sigue siendo estrictamente creciente.

Veamos ahora que sucede con $\delta = 0.35$.

Donde se rescatan los resultados del cuadro de soluciones numéricas:

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
$8.24 \times 10^{+00}$	$8.58 \times 10^{+01}$	8.06×10^{-02}	25.82	28.73

Cuadro 4.4: Resultados del perfil de velocidad utilizando $\delta = 0.35$ y $\Omega = 0.99$.

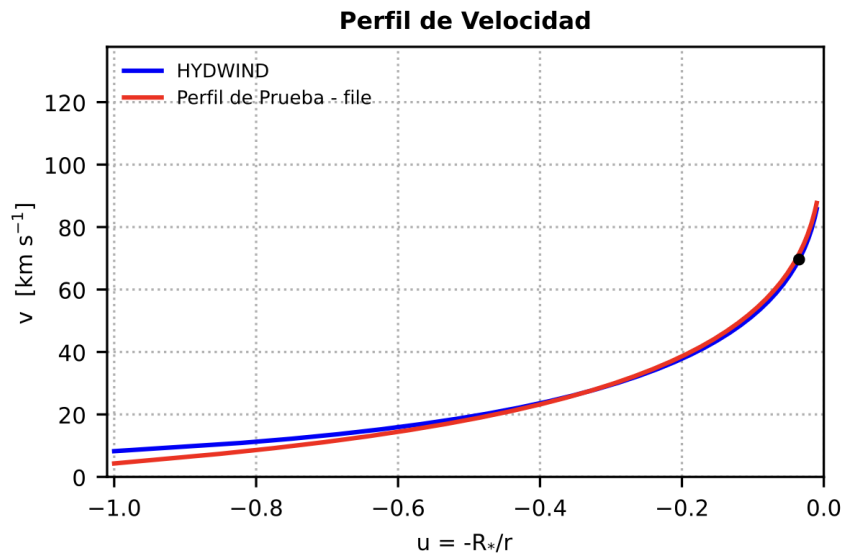


Figura 4.12: En la curva azul se presenta el perfil de velocidad de una solución lenta, en rojo; el perfil de prueba, en negro; el punto crítico. Los parámetros utilizados son $\delta = 0.35$ y $\Omega = 0.99$.

Se debe notar la alta velocidad inicial v_0 que posee esta solución, la cual comienza con una velocidad mayor, con respecto al perfil de prueba y termina con una velocidad terminal menor. Veamos ahora el comportamiento del perfil de velocidad del viento pero para un valor fijo de $\Omega = 0.98$ y valores de ionización mayores a 0.25.

Donde los resultados de la solución numérica son:

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
$1.62 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.58×10^{-02}	28.29	25.50

Cuadro 4.5: Resultados del perfil de velocidad utilizando $\delta = 0.25$ y $\Omega = 0.98$.

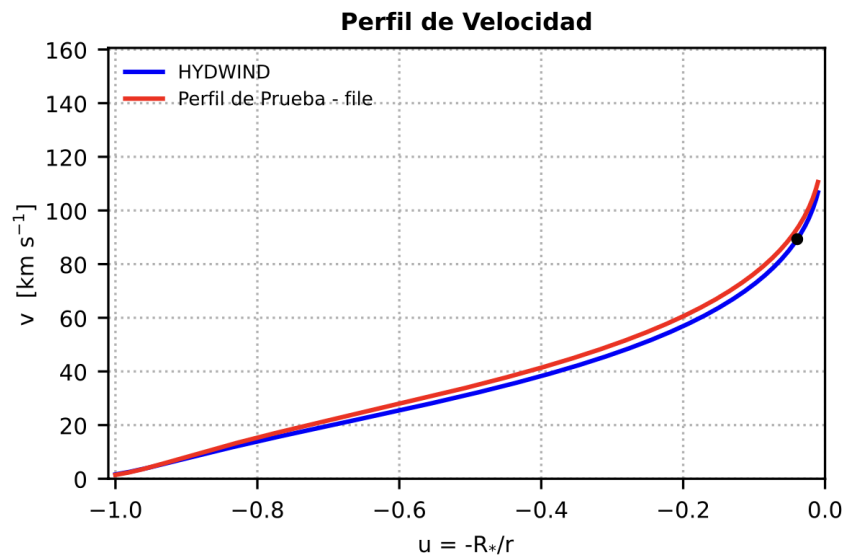


Figura 4.13: En la curva azul se presenta el perfil de velocidad de una solución lenta, en rojo; el perfil de prueba, en negro; el punto crítico. Los parámetros utilizados son $\delta = 0.25$ y $\Omega = 0.98$.

En esta Figura 4.13, remarcamos que prácticamente todo el perfil de velocidad está caracterizado por velocidades menores a las del perfil de prueba.

Al igual que antes, analicemos qué ocurre cuando $\delta = 0.35$.

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
$2.86 \times 10^{+00}$	$9.95 \times 10^{+01}$	2.79×10^{-02}	30.26	27.85

Cuadro 4.6: Resultados del perfil de velocidad utilizando $\delta = 0.35$ y $\Omega = 0.98$.

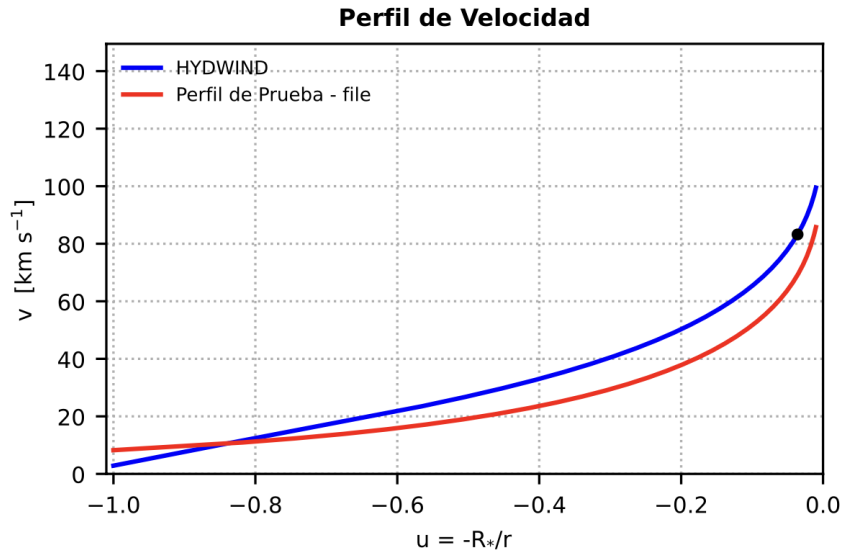


Figura 4.14: En la curva azul se presenta el perfil de velocidad de una solución lenta, en rojo; el perfil de prueba, en negro; el punto crítico. Los parámetros utilizados son $\delta = 0.25$ y $\Omega = 0.98$.

El perfil de prueba en rojo, es el perfil de velocidad presentado en la Figura 4.12, en la cual la velocidad inicial, v_0 , es considerablemente alta comparado con el perfil de velocidad en azul. Se puede apreciar que esta solución tiene por velocidad inicial un tanto más baja que la velocidad inicial del perfil de prueba, pero prontamente la solución numérica describe velocidades más altas.

De igual forma seguiremos analizando las soluciones numéricas para cada valor de Ω considerado y los valores altos de $\delta = 0.25$ y 0.35 .

Ahora para $\Omega = 0.97$ y $\delta = 0.25$ tenemos:

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
$1.01 \times 10^{+00}$	$1.22 \times 10^{+02}$	9.88×10^{-03}	31.82	24.80

Cuadro 4.7: Resultados del perfil de velocidad utilizando $\delta = 0.25$ y $\Omega = 0.97$.

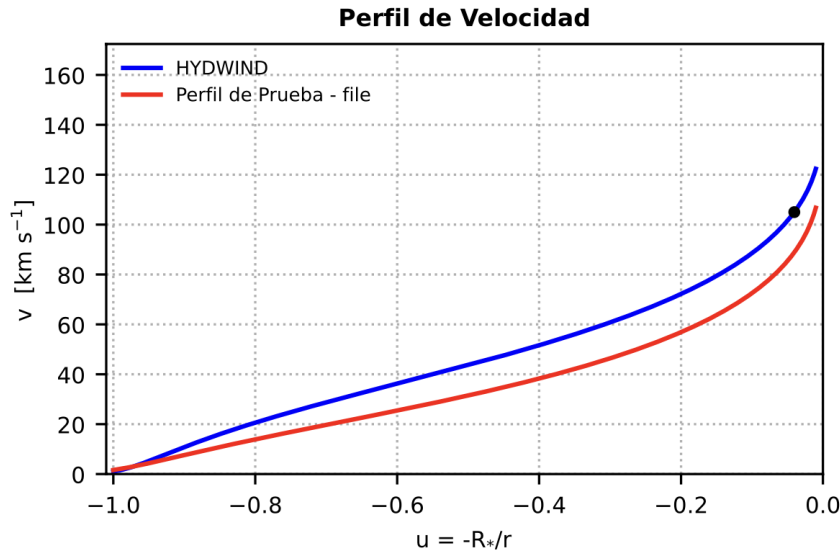


Figura 4.15: En la curva azul se presenta el perfil de velocidad de una solución lenta, en rojo; el perfil de prueba, en negro; el punto crítico. Los parámetros utilizados son $\delta = 0.25$ y $\Omega = 0.97$.

Para este caso, sólo la velocidad inicial v_0 está por debajo del perfil de prueba, luego toda la solución numérica describe velocidades más altas. Además se logra percibir un ligero cambio en la concavidad de la solución numérica.

Ahora para $\delta = 0.35$, tenemos:

$v_0[\text{km s}^{-1}]$	$v_\infty[\text{km s}^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot\text{yr}^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
$1.18 \times 10^{+00}$	$1.13 \times 10^{+02}$	1.15×10^{-02}	34.55	27.02

Cuadro 4.8: Resultados del perfil de velocidad utilizando $\delta = 0.35$ y $\Omega = 0.97$.

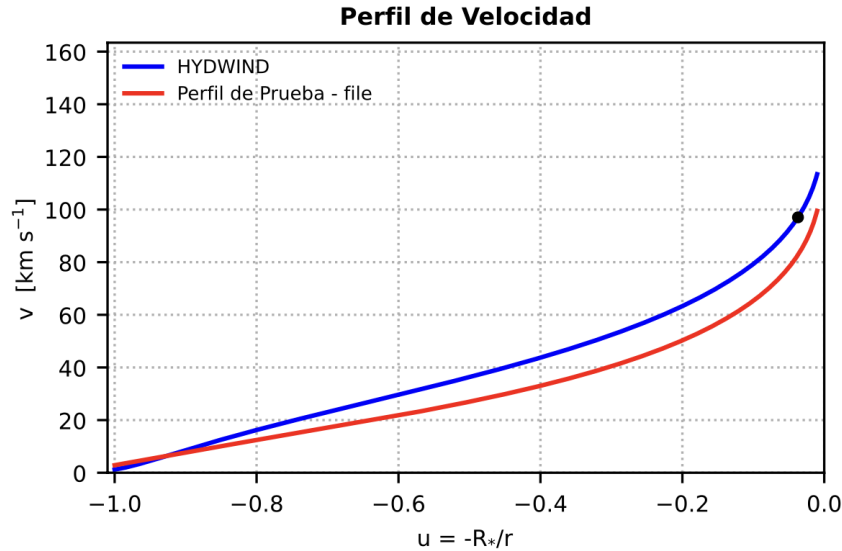


Figura 4.16: En la curva azul se presenta el perfil de velocidad de una solución lenta, en rojo; el perfil de prueba, en negro; el punto crítico. Los parámetros utilizados son $\delta = 0.35$ y $\Omega = 0.97$.

En términos de cualidades, esta solución numérica es similar para el caso $\delta = 0.25$ pero esta

sí describe una velocidad terminal más baja. Veamos ahora el caso donde el valor $\Omega = 0.96$

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
6.81×10^{-01}	$1.37 \times 10^{+02}$	6.66×10^{-03}	35.12	24.24

Cuadro 4.9: Resultados del perfil de velocidad utilizando $\delta = 0.25$ y $\Omega = 0.96$.

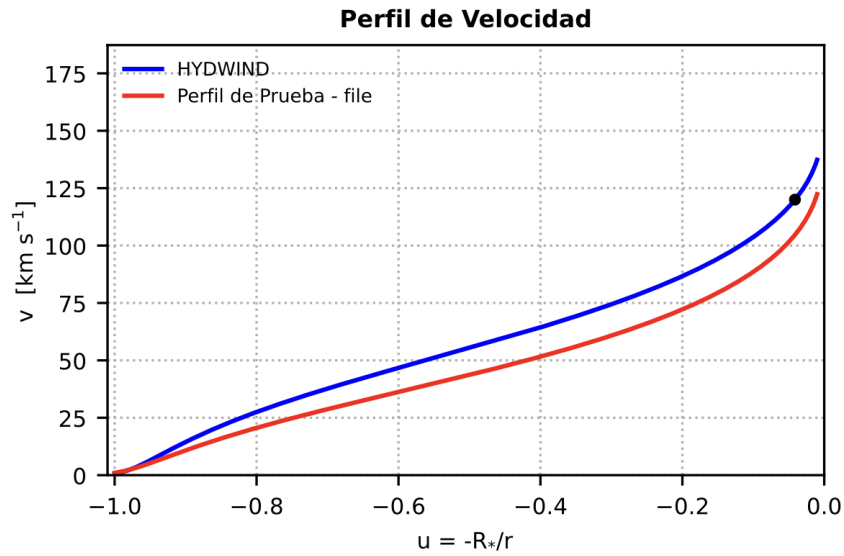


Figura 4.17: En la curva azul se presenta el perfil de velocidad de una solución lenta, en rojo; el perfil de prueba, en negro; el punto crítico. Los parámetros utilizados son $\delta = 0.25$ y $\Omega = 0.96$.

Comparado al caso anterior, esta solución describe una velocidad terminal más alta, y se sigue manteniendo ese cambio de concavidad sutil en la dinámica del perfil de velocidad.

De forma similar mostramos ahora el caso $\delta = 0.35$.

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
5.61×10^{-01}	$1.27 \times 10^{+02}$	5.49×10^{-03}	38.63	27.02

Cuadro 4.10: Resultados del perfil de velocidad utilizando $\delta = 0.35$ y $\Omega = 0.96$.

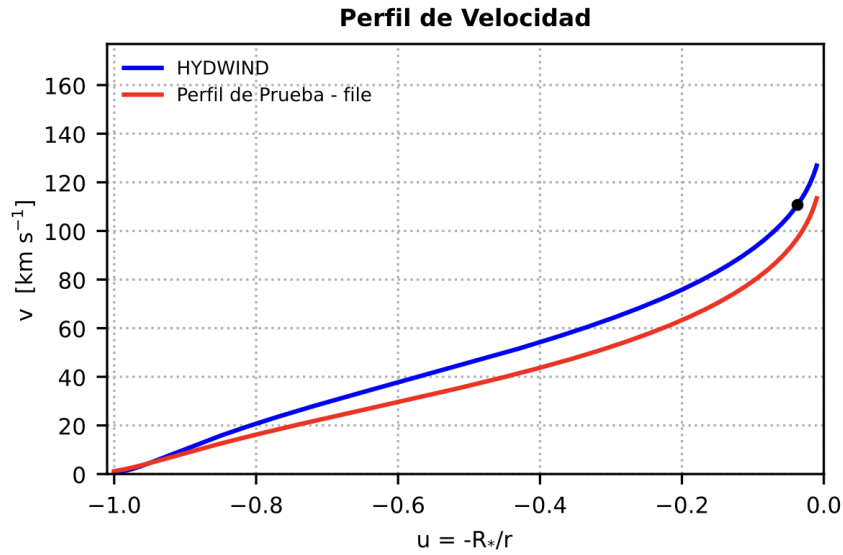


Figura 4.18: En la curva azul se presenta el perfil de velocidad de una solución lenta, en rojo; el perfil de prueba, en negro; el punto crítico. Los parámetros utilizados son $\delta = 0.35$ y $\Omega = 0.96$.

De manera similar, las cualidades en la velocidad inicial v_0 y en los comportamientos del perfil de velocidad se mantienen para estas variaciones, y en este caso describimos una velocidad terminal más baja que la anterior.

Finalmente, veamos ahora los dos casos de ionización alta para el valor de $\Omega = 0.95$

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
4.85×10^{-01}	$1.52 \times 10^{+02}$	4.75×10^{-03}	38.22	24.24

Cuadro 4.11: Resultados del perfil de velocidad utilizando $\delta = 0.25$ y $\Omega = 0.95$.

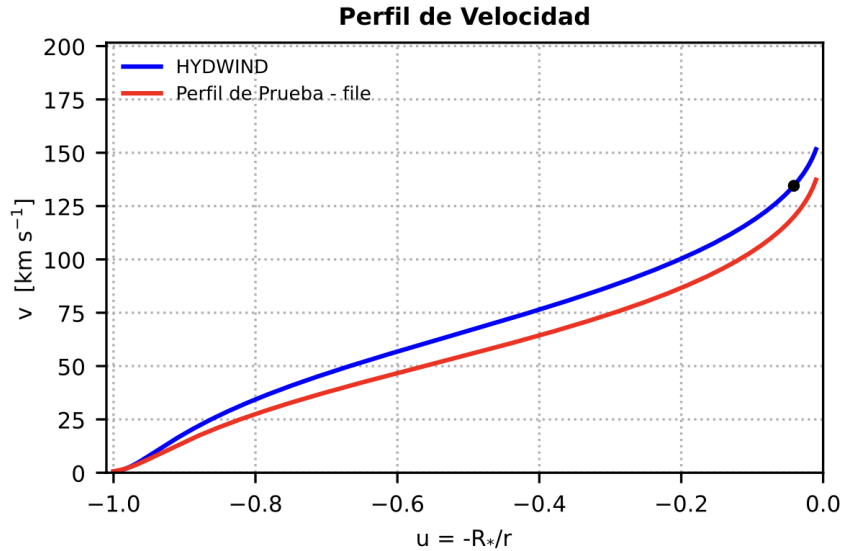


Figura 4.19: En la curva azul se presenta el perfil de velocidad de una solución lenta, en rojo; el perfil de prueba, en negro; el punto crítico. Los parámetros utilizados son $\delta = 0.25$ y $\Omega = 0.95$.

Para este caso, si se percibe un cambio de concavidad cercano a la superficie estelar.

Ahora para el caso $\delta = 0.35$

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
2.97×10^{-01}	$1.40 \times 10^{+02}$	2.90×10^{-03}	42.50	26.24

Cuadro 4.12: Resultados del perfil de velocidad utilizando $\delta = 0.35$ y $\Omega = 0.95$.

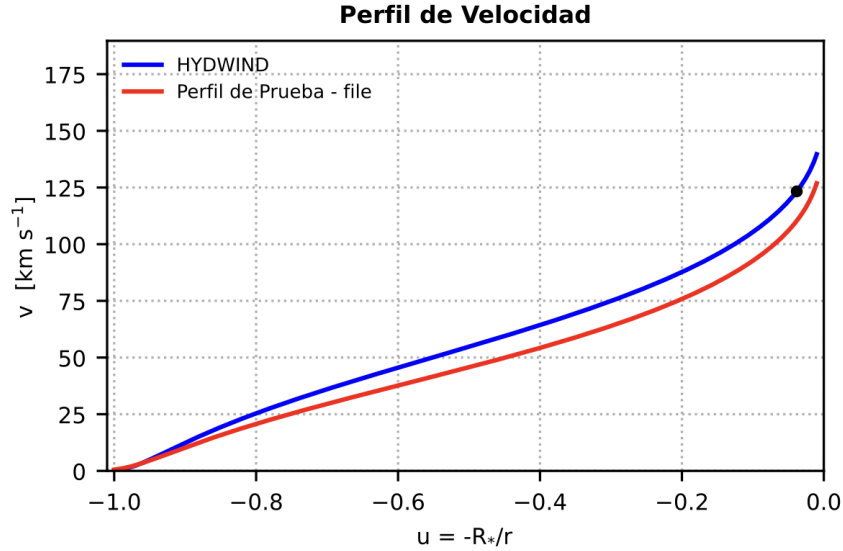


Figura 4.20: En la curva azul se presenta el perfil de velocidad de una solución lenta, en rojo; el perfil de prueba, en negro; el punto crítico. Los parámetros utilizados son $\delta = 0.35$ y $\Omega = 0.95$.

Para esta solución numérica, se aprecia una velocidad terminal menor que el caso presentado en la Figura 4.19.

Para ir cerrando esta sección de soluciones numéricas, presentemos un caso con cualidades particulares:

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
8.26×10^{-01}	$1.80 \times 10^{+02}$	8.08×10^{-03}	27.01	19.07

Cuadro 4.13: Resultados del perfil de velocidad utilizando $\delta = 0.00$ y $\Omega = 0.95$.

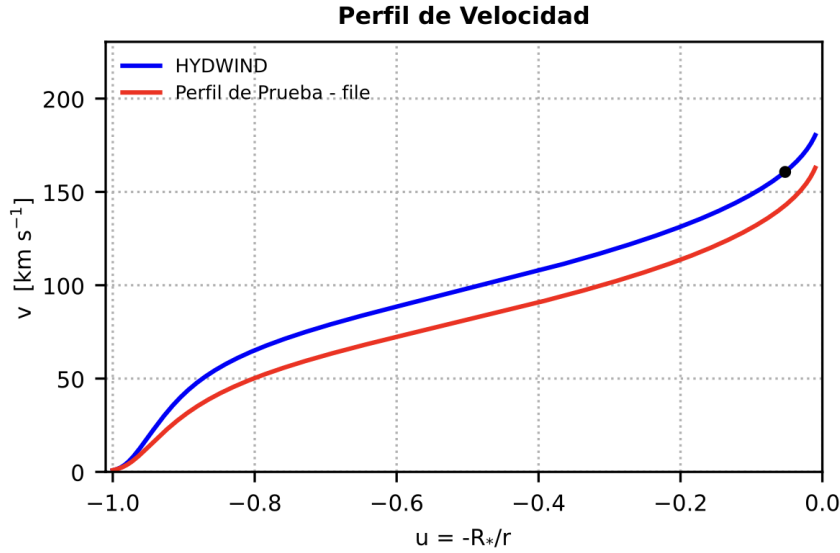


Figura 4.21: En la curva azul se presenta el perfil de velocidad de una solución lenta, en rojo; el perfil de prueba, en negro; el punto crítico. Los parámetros utilizados son $\delta = 0.00$ y $\Omega = 0.95$.

Para este caso sin cambios en la ionización, el valor de Ω induce un gran cambio de concavidad lo que implica cambios en la dinámica del perfil de velocidad.

Se remarca que a través del procedimiento de búsqueda de soluciones numéricas, solo se obtienen soluciones lentas, dado que se ha considerado un perfil de prueba que corresponde a una solución lenta para la inicialización del proceso. Esto se puede verificar con la localización de los puntos singulares, los cuales en todos los casos presentados, se encuentran lejanos a la superficie estelar, todos mayores a 10 radios estelares.

4.5. Análisis de soluciones

En el caso con $\delta = 0.00$, si se compara con los casos anteriores, se observa que la influencia de valores altos para el cambio de la ionización, resulta en cambios de concavidad para el perfil de velocidad menos drásticos, es decir, más suaves. Esto sugiere que la disminución del valor de Ω provoca cambios en la concavidad del perfil, aunque es importante recordar que, en el modelo inicial *GammaVis*, el perfil de velocidad es estrictamente creciente. Sin embargo, al aumentar el valor de δ , la ionización parece tener un efecto modulador que suaviza estos cambios en el gradiente de la velocidad del viento, haciendo que las transiciones sean más graduales y menos abruptas.

Este comportamiento puede interpretarse como una interacción compleja entre los efectos de rotación y ionización en el perfil de velocidad del viento estelar. La rotación Ω actúa como un factor que introduce variabilidad y posibles inflexiones en el perfil de velocidad, alterando la concavidad de la curva y provocando bifurcaciones que podrían reflejarse en comportamientos dinámicos inestables, dada las dificultades en la obtención de soluciones numéricas para valores de $\Omega \leq 0.94$. Sin embargo, al incrementar δ , se observa que la ionización contribuye a estabilizar el gradiente de velocidad, mitigando las variaciones bruscas e inflexiones que la rotación puede inducir.

Este fenómeno sugiere que, en modelos de vientos estelares donde los cambios en la ionización juegan un papel predominante, es posible que la estructura del viento sea más robusta y menos susceptible a cambios abruptos en la velocidad a lo largo del perfil. Los cambios en la ionización parece actuar como un amortiguador de las fluctuaciones inducidas por la rotación,

lo que podría tener implicaciones significativas en la predicción y modelización de vientos estelares, especialmente en aquellos sistemas donde ambos parámetros, Ω y δ , varían dentro de rangos amplios.

4.6. Observaciones sobre los valores propios y velocidades terminales

Se presenta un análisis del comportamiento de los valores propios y las velocidades terminales obtenidos para los intervalos de ionización $\delta \in [0, 0.35]$ y rotación $\Omega \in [0.99, 0.95]$, así como sus respectivas combinaciones, abarcando un total de 40 soluciones numéricas.

Este análisis busca identificar patrones y tendencias en la variación de los valores propios y velocidades terminales al modificar los parámetros de ionización y rotación. Al examinar diferentes combinaciones dentro de los rangos indicados, se pueden obtener conocimientos sobre cómo estos factores afectan el comportamiento dinámico del sistema. Es importante destacar que la elección de estos intervalos no es arbitraria, sino que está motivada por la necesidad de explorar valores altos en ambos parámetros, lo que proporciona una visión integral del fenómeno en estudio. Además, la combinación de estos parámetros ofrece la posibilidad de observar posibles escenarios de bifurcaciones con respecto a los cambios cualitativos en las soluciones numéricas.

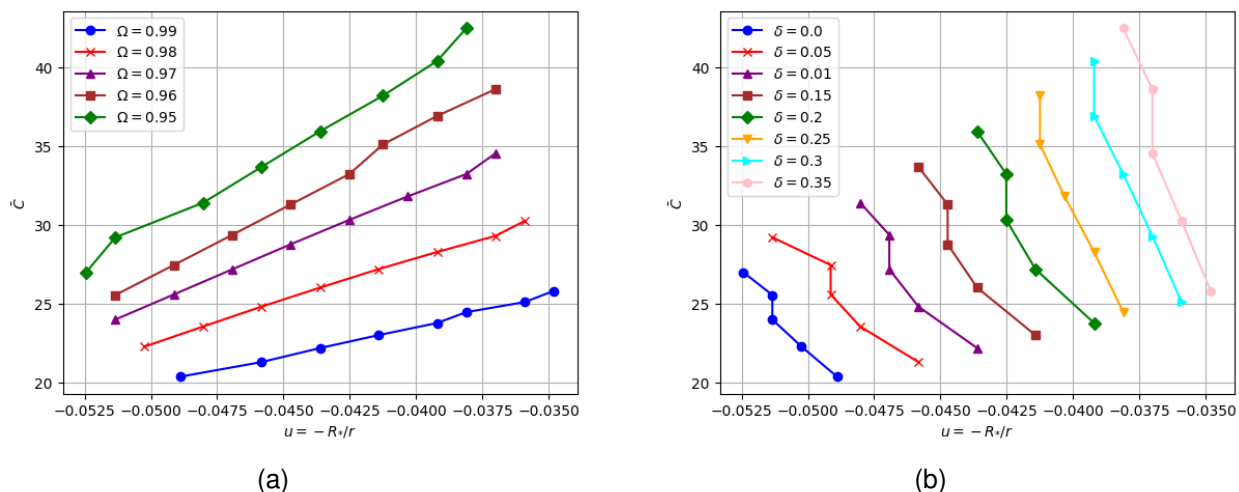


Figura 4.22: Parte (a): Presentación de la evolución de los valores propios bajo la dependencia paramétrica de δ para cada valor de Ω fijo. Parte (b): Presentación de la evolución de los valores propios, disminuyendo el valor de Ω para cada valor fijo de δ .

En primer lugar, se observa que la influencia de la rotación Ω provoca que los valores propios tiendan a aumentar a medida que el valor de Ω disminuye. Por otro lado, la influencia de los cambios en la ionización δ muestra un comportamiento monótono creciente, es decir, los valores propios aumentan a medida que δ se incrementa. Esto implica que, si se buscan soluciones partiendo de un perfil de velocidad inicial descrito por una solución exacta para valores más altos de δ , será necesario considerar valores propios más elevados que los obtenidos previamente. De manera similar, si se intenta reducir la rotación Ω , también será necesario ajustar al alza los valores propios.

Este comportamiento sugiere que los valores de Ω y δ están intrínsecamente ligados a la estabilidad y al comportamiento dinámico del sistema. La tendencia al aumento de los valores propios conforme disminuye Ω puede estar relacionada con una mayor complejidad en las

trayectorias del sistema, lo que exige una mayor precisión en la selección de los valores propios para asegurar la convergencia de las soluciones numéricas. De igual manera, el aumento de δ exige un ajuste en los valores propios para mantener la estabilidad del modelo.

Se presenta ahora el comportamiento de la velocidad terminal

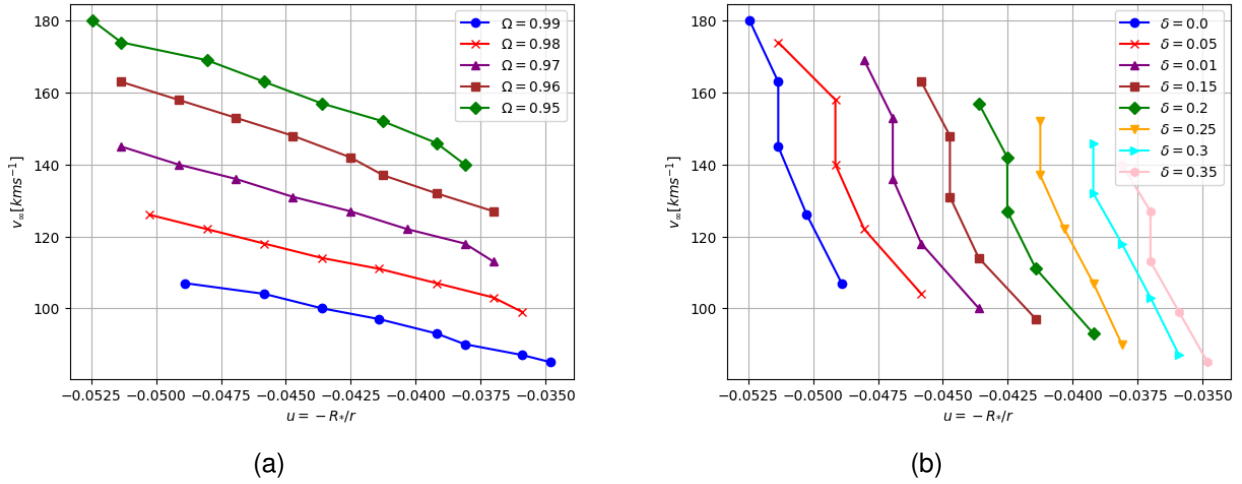


Figura 4.23: Parte (a): Presentación de la evolución de las velocidades terminales v_∞ , en función de la dependencia paramétrica para los incrementos de δ , con cada valor de Ω fijo. Parte (b): Presentación de la dinámica de las velocidades terminales v_∞ pero, realizando la disminución del valor Ω para cada valor fijo de δ .

En contraste con el análisis del comportamiento de los valores propios, en el caso de las velocidades terminales, se observa que a medida que aumenta el cambio en la ionización δ , las velocidades terminales descritas por las soluciones numéricas tienden a ser cada vez más bajas. Sin embargo, cuando el valor de Ω disminuye, las velocidades terminales aumentan inicialmente, pero con el aumento de δ , estas velocidades comienzan a disminuir nuevamente. Es importante destacar que, a medida que las velocidades terminales disminuyen, estas se desarrollan a mayor distancia de la superficie estelar. Esto se evidencia en los gráficos y cuadros presentados anteriormente. Esto implica que, si se desean alcanzar velocidades terminales bajas, es necesario buscar puntos críticos que se manifiesten a distancias cada vez mayores de la superficie estelar.

Este comportamiento puede establecer que un mayor cambio en la ionización δ podría estar asociada con un mayor arrastre del material, lo que reduce la velocidad terminal a medida que se aleja de la estrella. Por otro lado, la relación inversa con Ω sugiere que la rotación estelar juega un papel considerable en la aceleración del viento, elevando las velocidades terminales hasta cierto punto, antes de que el creciente cambio en la ionización provoque una disminución.

4.7. Análisis de puntos críticos

En esta sección remarcamos la evolución de la ubicación de los puntos críticos en las distintas soluciones que se han obtenido.

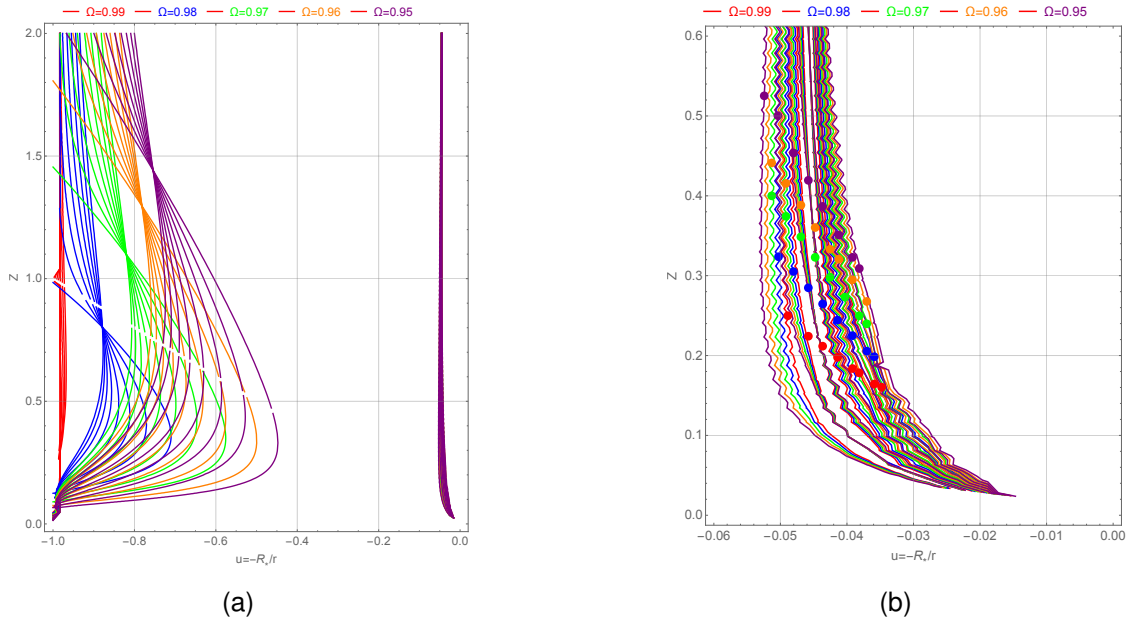


Figura 4.24: Parte (a): Presentación de las curvas de nivel resultantes de la intersección entre la superficie $R(u, Z)$ y el semiplano $R(u, Z) = 0$, bajo los distintos valores de δ para cada Ω fijo. Parte (b) se presenta la ventana $[-0.06, 0.00] \times [0.00, 0.6]$ de la parte (a) en adición de los puntos críticos correspondientes a cada solución.

En la Figura 4.24, para la parte izquierda de la gráfica 4.24a, se debe precisar que las distintas curvas de nivel, representadas por igual color, evolucionan en función del parámetro δ de derecha a izquierda. En contraste, en la parte derecha de 4.24a o bien la ventana presentada en 4.24b, la evolución es de izquierda a derecha.

Si se observa la parte izquierda de 4.24a, es importante notar que para valores fijos de Ω , la dinámica de las curvas de nivel tiende a amplificar la característica inherente de cada curva (amplitud de la curva). Esto se refleja en las observaciones gráficas del perfil de velocidad del viento, específicamente en los cambios del gradiente de velocidad, que se manifiestan en las variaciones de la concavidad de la curva del perfil de velocidad. En este estudio gráfico, se puede observar que un perfil de velocidad con cambios de concavidad está asociado con una gran curva de nivel en la superficie $R(u, Z)$. A medida que analizamos cada grupo de curvas para un valor fijo de Ω , se aprecia que la disminución de Ω provoca bifurcaciones en el gradiente de velocidad. Además, al examinar cómo estas curvas dependen de δ , se puede concluir que, a medida que aumenta el valor del cambio en la ionización δ , las curvas de nivel tienden a regularizarse. Esto sugiere que, con valores elevados de δ , las bifurcaciones en el gradiente de velocidad tienden a disiparse, lo que se traduce en un perfil de velocidad más estable y menos propenso a cambios abruptos.

Pasando al análisis detallado de la gráfica 4.24b, se observa que los puntos críticos para cada valor fijo de Ω se alejan progresivamente de la superficie estelar a medida que aumenta δ . Esto se deduce de la definición de la variable $u = R_*/r$, donde valores más cercanos a 0 en el eje horizontal indican una mayor distancia respecto a la superficie estelar. Esta observación también se conecta con el análisis de valores propios en la sección anterior, donde se estableció que, a medida que el valor propio aumenta, el punto crítico debe ubicarse más lejos

de la superficie estelar. Este alejamiento indica un cambio en la estructura del viento estelar, posiblemente relacionado con una mayor estabilización del viento en respuesta a un mayor nivel de ionización.

4.8. Conclusiones y discusiones acerca de los resultados obtenidos

En primer lugar, es importante destacar que se han tomado soluciones lentas como punto de partida en nuestro procedimiento de búsqueda de soluciones. Esta consideración ha producido soluciones numéricas lentas obtenidas del programa HYDWIND, ya que, como explica Araya *et al.* [4], no es adecuado utilizar soluciones lentas como prueba para buscar soluciones rápidas, y viceversa. Este enfoque subraya la necesidad de una cuidadosa selección inicial, considerando que la naturaleza de la solución de entrada influye directamente en el tipo de solución que se obtendrá.

También se ha observado que tanto el aumento del cambio en la ionización δ como la disminución de la rotación Ω tienden a incrementar el valor propio. Por lo tanto, al buscar soluciones y determinar un valor propio adecuado, es recomendable optar por un aumento de este valor cuando se considere una menor velocidad de rotación y un incremento en la ionización. Esta relación sugiere que los cambios en estos parámetros afectan directamente la estabilidad y el comportamiento de las soluciones.

Para ampliar el análisis, se destaca que los escenarios de bifurcación no solo complican la precisión en la determinación de los valores propios, sino que también tienen un impacto significativo en la estabilidad del sistema. Las soluciones rápidas y lentas presentan dinámicas diferentes, lo que exige un enfoque detallado y específico para cada caso. Esto resalta la importancia de seleccionar adecuadamente los valores iniciales y los parámetros de modelado, ya que, influye en la obtención de resultados precisos y consistentes en la simulación de vientos estelares. Un análisis detallado de estos factores es necesario para comprender plenamente las implicaciones físicas y numéricas de las soluciones obtenidas en el contexto de los vientos estelares.

4.9. Estudios numéricos futuros

Considerando que se han fijado los valores de $\alpha = 0.5$ y $\gamma_{vis} = 0.52$, en base al criterio de la consideración de la solución *GammaVis* que hemos tomado como perfil de prueba para inicializar el procedimiento de búsqueda de soluciones, y que la variación paramétrica en la obtención de soluciones numéricas se ha centrado en la influencia de los parámetros δ y Ω , estudios futuros quizás podrían enfocarse en analizar conjuntamente la influencia de los cuatro parámetros mencionados. Veamos, por ejemplo, dos soluciones particulares, con valores de α y γ_{vis} distintos, que se encontraron después de realizar toda la experimentación numérica de este trabajo y sus respectivas conclusiones.

Por un lado, la primera solución numérica posee los siguientes resultados:

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
1.64×10^{-05}	$1.15 \times 10^{+02}$	1.60×10^{-07}	49.99	16.93

Cuadro 4.14: Resultados del perfil de velocidad utilizando $\alpha = 0.41$, $\gamma_{vis} = 0.51$, $\delta = 0.35$ y $\Omega = 0.95$.

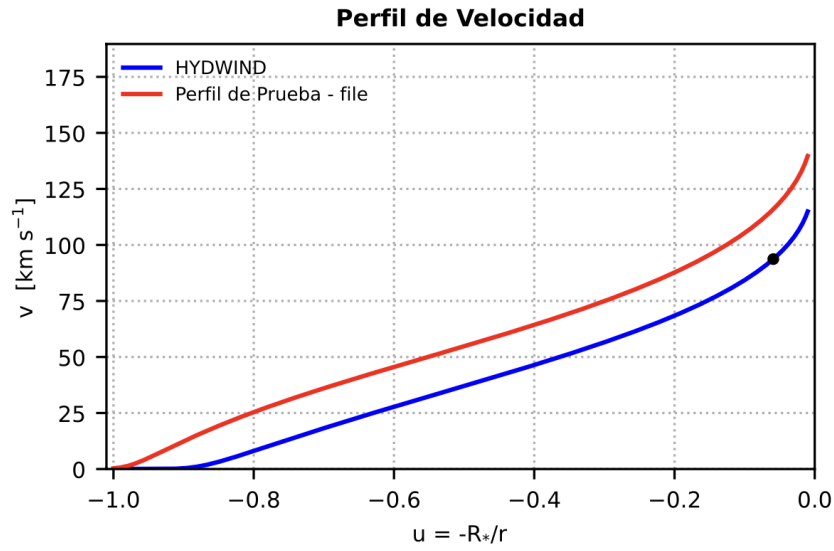


Figura 4.25: En la curva azul se presenta el perfil de velocidad de una solución lenta, en rojo; el perfil de prueba, en negro; el punto crítico. Los parámetros utilizados son $\alpha = 0.41$, $\gamma_{vis} = 0.51$, $\delta = 0.35$ y $\Omega = 0.95$.

Notemos en esta solución lo baja que es la velocidad inicial. En la gráfica presentada en la Figura 4.25, se puede apreciar que el perfil de velocidad se mantiene siempre por debajo del perfil de prueba. Además, se observa cómo la velocidad permanece constante y baja hasta que comienza a incrementarse.

Por otro lado, para la segunda solución se tiene:

$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c
2.17×10^{-03}	$6.17 \times 10^{+01}$	2.12×10^{-05}	33.86	31.75

Cuadro 4.15: Resultados del perfil de velocidad utilizando $\alpha = 0.40$, $\gamma_{vis} = 0.52$, $\delta = 0.35$ y $\Omega = 0.99$.

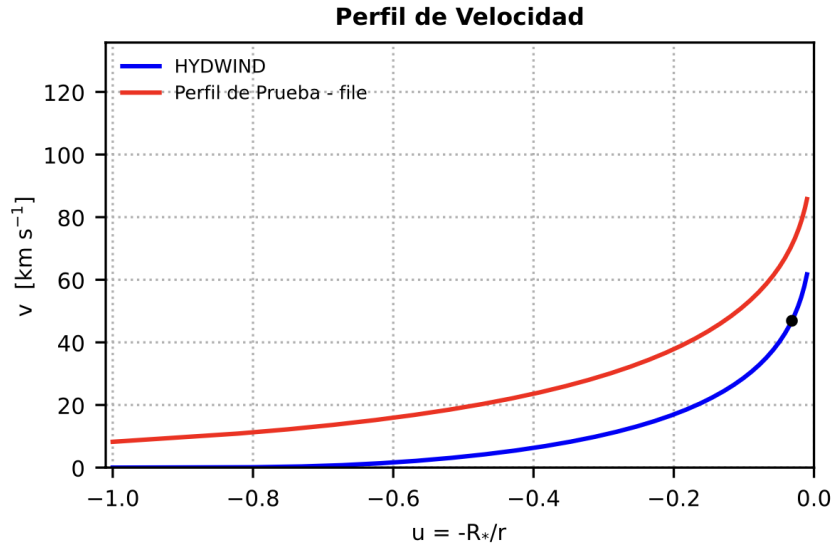


Figura 4.26: Perfil de velocidad del viento (curva azul) de una solución lenta utilizando $\alpha = 0.40$, $\gamma_{vis} = 0.52$, $\delta = 0.35$ y $\Omega = 0.99$. El punto negro corresponde al punto crítico alejado de la superficie estelar.

Para obtener la solución presentada en la Figura 4.26, se consigue con un perfil de prueba cuya velocidad inicial, v_0 , es bastante alta. También se destaca lo baja que es la velocidad terminal (cercana a $62 [km/s]$), la cual es la más baja encontrada en este trabajo. Además, se observa que el perfil de velocidad crece a una tasa lenta; cerca de la superficie estelar, la velocidad permanece constante. Ya más próximos al punto crítico, el aumento de la velocidad parece seguir un patrón de crecimiento exponencial.

Estos ejemplos son útiles para destacar que los cambios en los valores de α , γ_{vis} , δ y Ω juegan un gran papel al describir los vientos estelares, ya que se observan cualidades notorias en las cantidades físicas asociadas a estos vientos. Cabe destacar que los experimentos numéricos que consideren las variaciones de estos cuatro parámetros, podrían ser considerablemente más sensibles en términos de convergencia, y los resultados obtenidos tal vez requerirán, a su vez, una interpretación más cuidadosa.

Capítulo 5

Conclusiones generales del trabajo de título

En este trabajo, se han estudiado soluciones numéricas lentas provenientes de un modelo que describe los vientos impulsados por radiación en estrellas masivas. Este modelo, que ya ha sido analizado en la literatura, está descrito por ecuaciones diferenciales no-lineales y cambios de variables adecuados que permiten dar un enfoque paramétrico.

Se utilizaron teoremas y herramientas numéricas que permiten una descripción física de estos vientos, con el objetivo de encontrar soluciones numéricas que proporcionen información favorable para un análisis paramétrico. Este análisis se ha focalizado en la descripción de las cualidades intrínsecas del perfil de velocidad del viento, los valores propios asociados al problema y la localización de puntos críticos.

Se realizó un estudio de carácter numérico que conecta los comportamientos descriptivos del viento estelar con las soluciones numéricas del problema físico abordado. A través de esto se distingue cómo la elección de parámetros debe ser cuidadosa, no solo para la convergencia de soluciones numéricas, sino también para entender la dinámica de los valores propios y la localización de puntos críticos, aspectos esenciales en la búsqueda de nuevas soluciones numéricas.

A través del uso del código HYDWIND se ha logrado obtener soluciones lentas que muestran una alta dependencia del cambio en la ionización a lo largo del tiempo, parametrizado por δ y la velocidad de rotación Ω en los intervalos $[0.00, 0.35]$ y $[0.95, 0.99]$ respectivamente. Estos intervalos se han determinado a partir de la solución que se toma como perfil de prueba inicial. Para el caso de δ , el perfil de prueba comienza con $\delta = 0$, y se fue subiendo el valor hasta encontrar dificultades numéricas en la convergencia de soluciones. Similar para Ω , el perfil de prueba comenzaba con $\Omega = 0.99$, y se fue bajando el valor hasta llegar al punto donde no se obtuvo convergencia para las soluciones numéricas. Así se obtuvieron los intervalos mencionados, donde los resultados numéricos fueron analizados.

Al estudiar los resultados obtenidos, se ha observado en primer lugar que todas las soluciones presentadas son lentas, lo cual se refleja en la localización de los puntos críticos, que se encuentran a más de 10 radios estelares. Esto se debe a que la solución tomada como perfil de prueba corresponde a una solución lenta. Por lo tanto, es importante considerar que el perfil de prueba influye en la naturaleza de las soluciones numéricas obtenidas. Luego, se ha mostrado cómo los parámetros δ y Ω están estrechamente interconectadas en su contribución a las características de los vientos estelares.

Por medio de presentaciones de figuras para el perfil de velocidad y cuadros que sintetizan las cantidades de interés, como las velocidades terminales, tasa de pérdida masa, los valores propios, radios y puntos críticos. Se logra apreciar por un lado, la disminución de Ω induce cambios significativos en el gradiente de velocidad, provocando cambios de concavidad en

el perfil de velocidad. Por otro lado el aumento de δ tiende a regularizar el comportamiento del perfil de velocidad, favoreciendo una evolución más monótona, es decir, un aumento en la velocidad del viento estrictamente creciente a medida que se aleja de la superficie estelar. Este comportamiento también se ve reflejado en el estudio gráfico de las curvas, donde se localizan los puntos críticos. Se ha logrado observar que la disminución del valor de velocidad de rotación Ω , produce mayores amplitudes de estas curvas, mientras que el aumento en el cambio de ionización δ , tiende a disminuir esta característica.

A nivel físico, la disminución de Ω provoca velocidades terminales cada vez más altas, mientras que el aumento en los valores de δ resulta en una disminución de estas velocidades, lo que puede indicar un mayor arrastre de material, lo que reduciría su velocidad. Además, se ha identificado una dependencia creciente de los valores propios conforme disminuye Ω y aumenta δ . Por lo tanto, al buscar soluciones y determinar un valor propio adecuado. Considerando un perfil de prueba correspondiente a una solución analítica. Se recomienda optar por el aumento del valor propio cuando se esté considerando una velocidad de rotación Ω menor e incrementos en el cambio de ionización δ . Finalmente, se ha podido establecer una relación entre los valores propios y los puntos críticos, mostrando que a medida que el valor propio aumenta, el punto crítico se aleja progresivamente de la superficie estelar.

A través de estas observaciones, se obtiene un estudio preliminar vinculado en conjunto a estudios posteriores focalizados en el análisis conjunto de los parámetros k , α , γ_{vis} , δ y Ω , con el fin de establecer su influencia tanto en las características del perfil de velocidad como en las interpretaciones y efectos sobre las cantidades físicas, como las velocidades terminales, la tasa de pérdida de masa, el radio crítico, entre otros. Además, un aspecto adicional a considerar es la sensibilidad de las soluciones numéricas frente a variaciones en los parámetros mencionados. Las soluciones que podrían ser obtenidas pueden ser altamente dependientes de pequeños cambios en estos parámetros, lo que resalta la ayuda de un análisis matemático cualitativo. Un enfoque analítico detallado podría ayudar a comprender mejor las cualidades de las soluciones y proporcionar un marco teórico más robusto para anticipar cómo variaciones conjuntas en los parámetros, afectan el comportamiento del modelo que describe los vientos estelares impulsados por estrellas masivas.

Capítulo 6

Anexos

En este apartado se encuentran los anexos tanto para la profundización del programa HYD-WIND, las herramientas matemáticas, clasificación de estrellas, soluciones extras para una discretización más fina de δ .

6.1. Programa HYDWIND

Desde el programa HYDWIND, se emplea una forma de buscar nuevas soluciones además de dar la ubicación de los puntos críticos en función de la variación los parámetros Ω y δ . Este programa utiliza un archivo de entrada llamado for011.dat el cual esta representado en el siguiente cuadro:

Fila	Parámetros				
1	Nombre Modelo	Flag1	Flag2	FTW	
2	T_{eff}	$log(g)$	R_{*}		
3	Ω	γ_{vis}			
4	k	α	δ		
5	Y_{He}	Z_{He}			
6	Teoría	Método	Flag3	Flag4	
7	tau/den	Valor 1			
8	r_i	r_n	n		
9	θ_{ini}	θ_{end}	θ_{step}		
10	Conv _{crit}	Correction			
11	Flag5	Flag6	Flag7	Flag8	
12	Trivial $v(r)$	Valor 2	Valor 3	Valor4	Flag9

Los valores típicamente que se han variado son valores estelares, ya que, las "Flag", nos indican qué considerar, como la opción file, que archivos de *output* guardar. etc. Por defecto utilizamos la siguiente configuración

Fila	Parámetros				
1	Nombre Modelo	T	F	F	
2	T_{eff}	$\log(g)$	R_*		
3	Ω	γ_{vis}			
4	k	α	δ		
5	0.1	1			
6	ppk	sp	F	F	
7	den	5.d-11			
8	r_i	r_n	n		
9	90	90	0		
10	1e-6	1e-3			
11	T	T	F	F	
12	file	0	0	$\bar{C}$	F

Donde para la búsqueda de nuevas soluciones, particularmente variamos las filas 2, 3 y 4 más el valor de $\bar{C}$.

1	B0IV T T T	# Model name - Prepend output file - print screen output - fastwind output
2	25000. 3.5 10.00	# Teff -logg - Radius
3	0.80 1.0	# Omega - Gamma_vis
4	0.32 0.565 0.02	# k - alpha - delta
5	0.1 1.0	# He/H - (A=0,B=1,0=2) electrons provided by helium nucleus
6	ppk sp F F	# Theory - integration method - Oblate factor - Gravity Darkening
7	den 5.d-11	# Boundary condition: Tau / Den - value
8	1.0 200.0 900	# R_ini - R_end - No points in the mesh
9	90 90 0	# theta_ini - theta_end - theta steps
10	1e-6 1e-3	# convergence error - convergence jumps
11	T T F F	# vsound>v(0) - check discontinuity dw/du - (?) dw/du - (?) dw/du
12	fast 1.5 400.0 30.0 T	# (acc - fast - manual - dslow - file) - beta - vinf - vprop - next v(r)?
13	manual 1.5 400.0 30.0 F	

Figura 6.1: Vista preliminar del archivo de entrada para el programa HYDWIND donde se ven especificados todos los parámetros a considerar para la búsqueda del perfil de velocidad.

Ahora, el programa produce dos archivos .dat de salida, uno de ellos especifica el valor numérico del perfil de velocidad en cada punto de la malla y el otro archivo nos produce un resumen de los valores encontrados por el programa, destacando el perfil de velocidad, la tasa pérdida de masa, el punto crítico y la relación *Wind Momentum Luminosity*.

1	----- HYDWIND v3.3 (12/2022) -----	41	
2	Date: 1/ 7/2023	42	critical point :
3	Time: 4: 7:15	43	
4		44	u_crit = -5.874E-02 r_crit = 1.702E+01
5	***** star : B0IV	45	w_crit = 2.040E+01 v_crit(km/s) = 3.676E+02
6		46	dw_crit = 3.538E+01 dens_crit = 2.304E+02
7	Oblate Factor: OFF Gravity Darkening: OFF	47	z_crit = 5.765E-01 y_crit = 7.218E+02
8		48	eig_val = 3.253E+01 mass_loss = 2.455E-01 (Msun*1e-6/year)
9		49	
10	T_eff = 2.500E+04 T(theta) = 2.500E+04	50	terminal velocity :
11	Logg = 3.500E+00 Logg(theta) = 3.500E+00	51	
12	Rstar(pole) = 6.960E+11 Rstar(theta) = 6.960E+11	52	v_ter = 4.141E+02 at r = 2.000E+02
13	Rstar_p/Rsun= 1.000E+01 Rstar_th/Rsun = 1.000E+01	53	
14	Mstar = 2.295E+34 Mstar/Msun = 1.154E+01	54	wind_density :
15	Lstar = 1.348E+38 Lstar/Lsun = 3.524E+04	55	
16	V_th(km/s) = 2.833E+01 athpr(km/s) = 1.802E+01	56	Rho_w = 5.928E+00 Log(Rho_w) = 7.729E-01
17	Vrot(deg) = 3.613E+02 Vrot(theta) = 3.613E+02	57	
18	theta(deg) = 9.000E+01 Omega = 8.000E-01	58	
19	Vesc(km/s) = 6.387E+02 sigele = 3.129E-01	59	***** Wind Momentum Luminosity (WLR):
20	Vcrit(km/s) = 4.517E+02 gammavis = 1.000E+00	60	
21	mue = 6.364E-01 gamma = 7.310E-02	61	D_nom = 2.026E+27 Log(D_nom) = 2.731E+01
22	Y_He = 1.000E-01 Z_He = 1.000E+00	62	
23	Log(Q) = -1.204E+01 Qbar(Gayley) = 2.792E+03	63	
24	Vter_cak = 7.280E+02 Mloss_cak = 1.967E-01 (Msun*1e-6/year)	64	***** statistic :
25	Vter_fa = 1.669E+03 Mloss_fa = 1.125E-01 (Msun*1e-6/year)	65	
26	**** Line force according to ppk theory ****	66	mesh point number = 851
27		67	boundary condition = 5.0002E-11
28		68	cr_pt between 1.6865E+01 and 1.7187E+01
29	***** line force parameters :	69	iterations = 318
30		70	error = 6.5858E-07
31	kion = 3.200E-01 alpha = 5.650E-01	71	
32	delta = 2.000E-02	72	***** succeed trial profile:
33		73	manual 1.50 400.00 30.00
34	***** numerical results :	74	***** lower boundary condition:
35		75	den : 0.5000E-10
36			
37	photosphere :		
38	v_ph(km/s)= 5.083E-01 w_ph = 2.821E-02		
39	dw_ph = 7.248E+01		

Figura 6.2: Archivo de salida en el cual se resume las cantidades encontradas en el programa.

Además contamos con un código de Python que ilustra de manera clara los outputs del programa HYDWIND a través de gráficos para el perfil de velocidad más un resumen en forma de cuadro para los parámetros estelares.

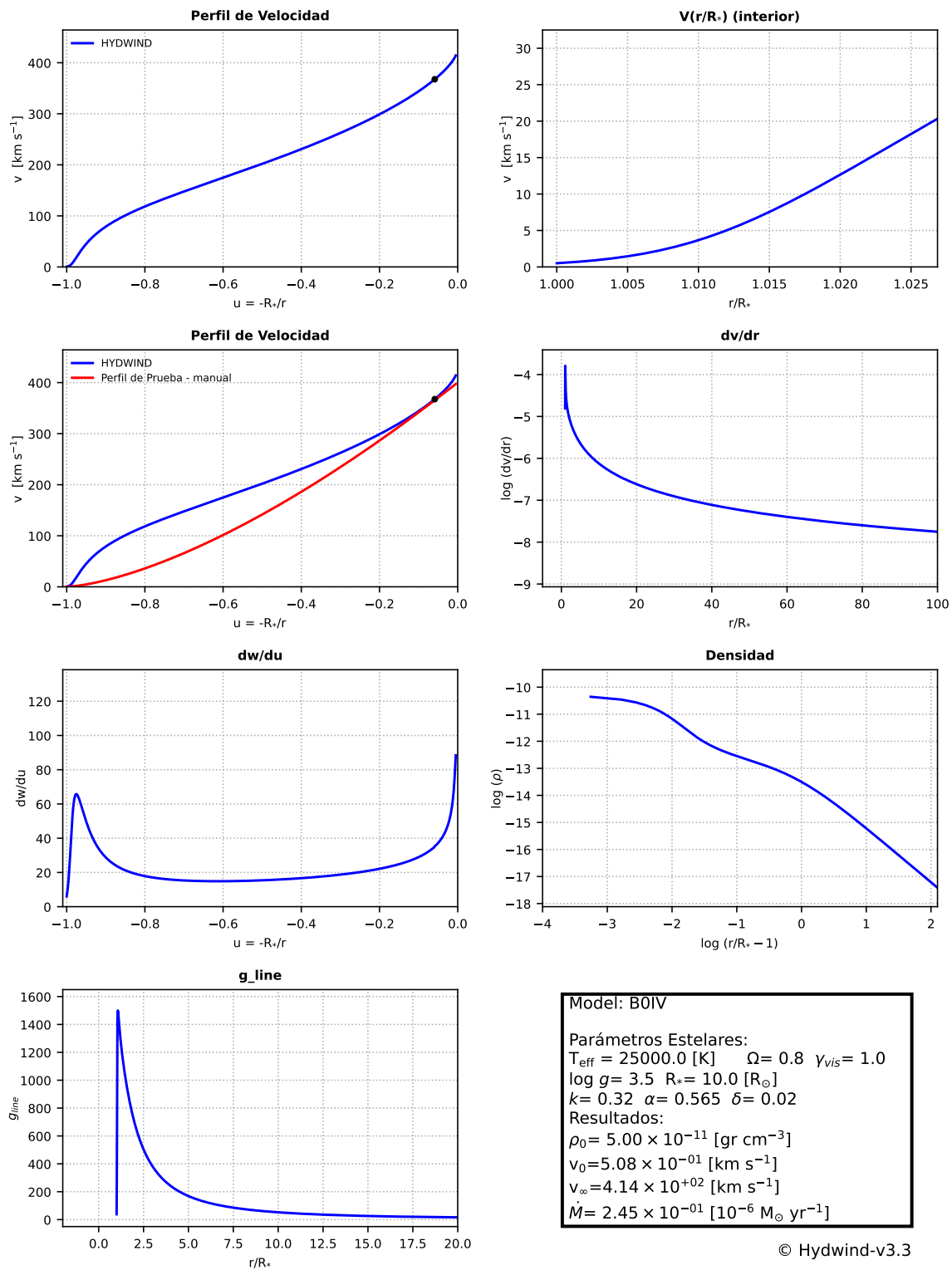


Figura 6.3: El código de Python entrega el siguiente conjunto de gráficos, donde en el primer gráfico vemos el perfil de velocidad en km s^{-1} en azul tomando el cambio de variable u lo cual hace que la superficie esté representada por -1 en el eje horizontal, además observamos la ubicación del punto crítico en negro. El cuadro con dos curvas, muestra el perfil de velocidad inicial del programa en la curva roja, la cual converge a la curva azul, es decir, el perfil de velocidad del viento inicial, converge al perfil de velocidad descrito por la curva azul del primer recuadro. Finalmente, se presenta el cuadro de parámetros y resultados.

Esto establece cuándo una solución físicamente relevante, ya que cumple con las condiciones mencionadas en este escrito las cuales son, comenzar en la superficie, atravesar el punto crítico y extenderse hacia el infinito.

6.2. Herramientas matemáticas

El programa HYDWIND funciona con el método de Diferencias Finitas (detalles en [23]) para la discretización de la ecuación (3.4). Este método es una técnica numérica para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales. Su fundamento se basa en la idea de aproximar las derivadas de una función mediante diferencias finitas entre valores de la función en puntos discretos.

En lugar de trabajar con funciones continuas, el dominio del problema (generalmente un intervalo en una dimensión o una región en dos o más dimensiones) se divide en una malla de puntos discretos.

Para una función $f(x)$, la primera derivada $f'(x)$ puede aproximarse por una diferencia finita:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}, \quad (6.1)$$

donde h es el tamaño del paso entre los puntos x_i y x_{i+1} .

Luego de este paso de discretización el programa toma como método de integración por defecto el método Spline (más detalles en [23]).

En la Sección 3.1 hemos remarcado el problema de la no normalización de la ecuación que describe el modelo, debido a esto presentamos el Teorema de la Función Implícita [15], una herramienta útil para la construcción del sistema dinámico.

Teorema 6.2.1. Función Implícita. *Supongamos que $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua y diferenciable de las variables $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}$, tal que $F(0, 0) = 0$. Si el Jacobiano de la matriz $DF(0, 0)$ (donde $(DF)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial y_j}$) es invertible entonces existe $\epsilon > 0$ y una curva suave*

$$y_i = Y_i(z), \quad i = 1, \dots, n,$$

la cual es única solución de $F(y_1, \dots, y_n, z) = 0$ en $|z| < \epsilon$, $|y| < \epsilon$.

Se tiene la necesidad de considerar un resultado sobre existencia de una solución para un problema de Cauchy para EDOs donde las funciones sean analíticas (ver la versión generalizada para EDP [17]).

Teorema 6.2.2. Cauchy-Kowalevski. *Supongamos que tenemos un sistema de EDOs de primer orden de la forma:*

$$\frac{dy_i}{dt} = F_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.2)$$

con condiciones iniciales:

$$y_i(0) = y_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.3)$$

donde las funciones $F_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$ son analíticas en un entorno del punto inicial $(0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ en el espacio $\mathbb{R}^{n+1}$.

Entonces existe un intervalo $(-T, T)$ alrededor de $t = 0$ y una solución analítica $y_i(t)$ para $i = 1, 2, \dots, n$ en este intervalo, además la solución es única en el intervalo $(-T, T)$.

Veamos un ejemplo para evidenciar la problemática de una ecuación no normalizada y su relación con la normalización en la derivada como sigue:

$$\begin{aligned}(y')^2 &= 1, \\ y(0) &= 0.\end{aligned}\tag{6.4}$$

Este problema describe de manera precisa la gran dificultad que conlleva una no linealidad en la derivada, ya que podemos tener dos soluciones como sigue:

$$y(t) = \begin{cases} t, \\ -t. \end{cases}\tag{6.5}$$

Debido a la condición inicial $y(0) = 0$, y dado que la ecuación no está normalizada, no podemos garantizar la unicidad de una solución.

Ahora si se considera el teorema de la función implícita, para la función $F(t, y, y') = (y')^2 - 1$, el teorema garantiza la existencia de una función $y(t)$ en torno a un punto si la derivada parcial de F con respecto a y' no es cero. Para este caso, tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y'.\tag{6.6}$$

En los puntos donde $y' = \pm 1$, la derivada parcial es 2 o -2, lo cual no es cero, lo que confirma la aplicabilidad del teorema para obtener las soluciones encontradas.

Para el ejemplo anterior tanto la ecuación como la condición inicial son analíticas, además las dos soluciones encontradas también lo son (son polinomios), por tanto, dado el teorema anterior, ambas soluciones son válidas, luego se concluye sobre la problemática de no poder garantizar la unicidad en $t=0$.

Por otro lado, dado que el problema físico depende de varios parámetros, se necesita un teorema de dependencia continua de estos [16]:

Teorema 6.2.3. Dependencia Continua de los Parámetros. *Supongamos que $X' = F_a(X)$ un sistema de ecuaciones diferenciales para el que F_a es continuamente diferenciable tanto en X como en a . Entonces el flujo de este sistema también depende continuamente de a .*

6.3. Clasificación de estrellas

Spectral Type	Characteristics
O	Hottest blue-white stars with few lines Strong He II absorption (sometimes emission) lines. He I absorption lines becoming stronger.
B	Hot blue-white He I absorption lines strongest at B2. H I (Balmer) absorption lines becoming stronger.
A	White Balmer absorption lines strongest at A0, becoming weaker later. Ca II absorption lines becoming stronger.
F	Yellow-white Ca II lines continue to strengthen as Balmer lines continue to weaken. Neutral metal absorption lines (Fe I, Cr I).
G	Yellow Solar-type spectra. Ca II lines continue becoming stronger. Fe I, other neutral metal lines becoming stronger.
K	Cool orange Ca II H and K lines strongest at K0, becoming weaker later. Spectra dominated by metal absorption lines.
M	Cool red Spectra dominated by molecular absorption bands, especially titanium oxide (TiO) and vanadium oxide (VO). Neutral metal absorption lines remain strong.
L	Very cool, dark red Stronger in infrared than visible. Strong molecular absorption bands of metal hydrides (CrH, FeH), water (H ₂ O), carbon monoxide (CO), and alkali metals (Na, K, Rb, Cs). TiO and VO are weakening.
T	Coolest, Infrared Strong methane (CH ₄) bands but weakening CO bands.

Figura 6.4: Clasificación de estrellas tipo espectral (tomada de [6]).

6.4. Cuadros de Soluciones

Acá se presenta una discretización para el valor de δ más fina para evidenciar esquemáticamente la dependencia continua de este parámetro. De igual forma que en el capítulo de resultados, se consideran fijos los valores de $\alpha = 0.5$ y $\gamma_{vis} = 0.52$.

$\alpha = 0.5, k = 0.32, \gamma_{vis} = 0.52$							
δ	Ω	$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c	u_c
0.001	0.99	$1.45 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.42×10^{-02}	20.39	20.45	-4.890×10^{-02}
0.002	0.99	$1.46 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.42×10^{-02}	20.41	20.54	-4.890×10^{-02}
0.003	0.99	$1.46 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.43×10^{-02}	20.43	20.54	-4.890×10^{-02}
0.004	0.99	$1.46 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.43×10^{-02}	20.45	20.54	-4.890×10^{-02}
0.005	0.99	$1.46 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.43×10^{-02}	20.47	20.54	-4.890×10^{-02}
0.006	0.99	$1.46 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.43×10^{-02}	20.49	20.54	-4.890×10^{-02}
0.007	0.99	$1.46 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.43×10^{-02}	20.51	20.54	-4.890×10^{-02}
0.008	0.99	$1.46 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.43×10^{-02}	20.53	20.54	-4.890×10^{-02}
0.009	0.99	$1.47 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.43×10^{-02}	20.55	20.54	-4.890×10^{-02}
0.01	0.99	$1.47 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.43×10^{-02}	20.56	20.82	-4.803×10^{-02}
0.011	0.99	$1.47 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.44×10^{-02}	20.58	20.82	-4.803×10^{-02}
0.012	0.99	$1.47 \times 10^{+00}$	$1.07 \times 10^{+02}$	1.44×10^{-02}	20.60	20.82	-4.803×10^{-02}
0.013	0.99	$1.47 \times 10^{+00}$	$1.06 \times 10^{+02}$	1.44×10^{-02}	20.62	20.82	-4.803×10^{-02}
0.014	0.99	$1.47 \times 10^{+00}$	$1.06 \times 10^{+02}$	1.44×10^{-02}	20.64	20.82	-4.803×10^{-02}
0.015	0.99	$1.48 \times 10^{+00}$	$1.06 \times 10^{+02}$	1.44×10^{-02}	20.65	20.82	-4.803×10^{-02}
0.016	0.99	$1.48 \times 10^{+00}$	$1.06 \times 10^{+02}$	1.44×10^{-02}	20.67	20.82	-4.803×10^{-02}
0.017	0.99	$1.48 \times 10^{+00}$	$1.06 \times 10^{+02}$	1.45×10^{-02}	20.69	20.82	-4.803×10^{-02}
0.018	0.99	$1.48 \times 10^{+00}$	$1.06 \times 10^{+02}$	1.45×10^{-02}	20.71	20.82	-4.803×10^{-02}
0.019	0.99	$1.48 \times 10^{+00}$	$1.06 \times 10^{+02}$	1.45×10^{-02}	20.73	20.82	-4.803×10^{-02}
0.02	0.99	$1.48 \times 10^{+00}$	$1.06 \times 10^{+02}$	1.45×10^{-02}	20.75	20.82	-4.803×10^{-02}
0.021	0.99	$1.49 \times 10^{+00}$	$1.06 \times 10^{+02}$	1.45×10^{-02}	20.77	20.82	-4.803×10^{-02}
0.022	0.99	$1.49 \times 10^{+00}$	$1.06 \times 10^{+02}$	1.45×10^{-02}	20.79	20.82	-4.803×10^{-02}
0.023	0.99	$1.49 \times 10^{+00}$	$1.06 \times 10^{+02}$	1.46×10^{-02}	20.81	21.31	-4.693×10^{-02}

Cuadro 6.1: Resultados de las soluciones numéricas encontradas para distintos valores de δ y Ω considerando valores fijos de $\alpha = 0.5$ y $\gamma_{vis} = 0.52$. Con incrementos del parámetro δ mas finos.

Este Cuadro 6.1 busca remarcar la dependencia continua del parámetro δ donde para incrementos pequeños del valor, los resultados para la caracterización del viento varían en menor medida para un valor fijo de $\Omega = 0.99$

$\alpha = 0.5, k = 0.32, \gamma_{vis} = 0.52$							
δ	Ω	$v_0[kms^{-1}]$	$v_\infty[kms^{-1}]$	$\dot{M}[10^{-6}M_\odot yr^{-1}]$	$\bar{C}$	r_c	u_c
0.03	0.99	$1.50 \times 10^{+00}$	$1.05 \times 10^{+02}$	1.47×10^{-02}	20.93	21.31	-4.693×10^{-02}
0.035	0.99	$1.51 \times 10^{+00}$	$1.05 \times 10^{+02}$	1.48×10^{-02}	21.03	21.31	-4.693×10^{-02}
0.04	0.99	$1.52 \times 10^{+00}$	$1.05 \times 10^{+02}$	1.49×10^{-02}	21.12	21.31	-4.693×10^{-02}
0.045	0.99	$1.53 \times 10^{+00}$	$1.04 \times 10^{+02}$	1.50×10^{-02}	21.21	21.82	-4.583×10^{-02}
0.05*	0.99	$1.54 \times 10^{+00}$	$1.04 \times 10^{+02}$	1.51×10^{-02}	21.30	21.82	-4.583×10^{-02}
0.06	0.99	$1.56 \times 10^{+00}$	$1.03 \times 10^{+02}$	1.53×10^{-02}	21.48	21.82	-4.583×10^{-02}
0.07	0.99	$1.59 \times 10^{+00}$	$1.03 \times 10^{+02}$	1.55×10^{-02}	21.66	22.36	-4.473×10^{-02}
0.08	0.99	$1.61 \times 10^{+00}$	$1.02 \times 10^{+02}$	1.58×10^{-02}	21.84	22.36	-4.473×10^{-02}
0.09	0.99	$1.64 \times 10^{+00}$	$1.01 \times 10^{+02}$	1.61×10^{-02}	22.01	22.36	-4.473×10^{-02}
0.1*	0.99	$1.67 \times 10^{+00}$	$1.0 \times 10^{+02}$	1.64×10^{-02}	22.19	22.92	-4.362×10^{-02}
0.15*	0.99	$1.87 \times 10^{+00}$	$9.71 \times 10^{+01}$	1.84×10^{-02}	23.01	24.14	-4.142×10^{-02}
0.2*	0.99	$2.24 \times 10^{+00}$	$9.38 \times 10^{+01}$	2.19×10^{-02}	23.78	25.50	-3.921×10^{-02}
0.25*	0.99	$2.89 \times 10^{+00}$	$9.06 \times 10^{+01}$	2.83×10^{-02}	24.47	26.24	-3.811×10^{-02}
0.3*	0.99	$4.30 \times 10^{+00}$	$8.77 \times 10^{+01}$	4.21×10^{-02}	25.11	27.85	-3.591×10^{-02}
0.35*	0.99	$8.24 \times 10^{+00}$	$8.58 \times 10^{+01}$	8.06×10^{-02}	25.82	28.72	-3.481×10^{-02}
0.385873	0.99	$1.65 \times 10^{+01}$	$8.65 \times 10^{+01}$	1.62×10^{-01}	26.71	28.73	-3.481×10^{-02}

Cuadro 6.2: Continuación del Cuadro 6.1. Los valores de δ acompañados por * se encuentran presentes en los cuadros del capítulo de resultados. Se calculan soluciones numéricas hasta el límite del valor de δ más alto que se pudo obtener.

Bibliografía

- [1] D. Abbott. The theory of radiatively driven stellar winds. ii - the line acceleration. *The Astrophysical Journal*, 259:282–301, 1982. [20](#)
- [2] I. Araya. Soluciones analíticas de vientos estelares en estrellas ba supergigantes. *Universidad de Valparaíso*, 2012. [16](#), [20](#), [22](#)
- [3] I. Araya and M. Curé. User guide for hydwind. *Universidad Mayor Universidad de Valparaíso*, 2020. [19](#), [34](#), [41](#)
- [4] I. Araya, M. Curé, A. ud Doula, A. Santillán, and L.Cidale. Co-existence and switching between fast and Ω -slow wind solutions in rapidly rotating massive stars. *MNRAS*, 477 : 755–765, 2018. [14](#), [55](#)
- [5] I. Araya, C. E. Jones, M. Curé, Silaj. J, L. Cidale, A. Granada, and A. Jiménez. Ω -slow Solutions and Be Star Disks. *The Astrophysical Journal*, 846(2) : 1–15, 2017. [11](#)
- [6] Dale A. Ostlie Bradley W. Carroll. *An Introduction to Modern Astrophysics*. Pearson, 2014. [10](#), [17](#), [66](#)
- [7] Henny J G L M Lamers; Joseph P Cassinelli. *Introduction to stellar winds*. Cambridge University Press, 1997.
- [8] M. Curé. The influence of rotation in radiation driven wind from hot stars: New solutions and disk formation in be stars. *The Astrophysical Journal*, 614:929–941, 2004. [22](#), [30](#)
- [9] M. Curé and I. Araya. Radiation-driven wind hydrodynamics of massive stars: A review. *Galxies*, 11, 2023. [20](#), [32](#), [33](#)
- [10] M. Curé, L. Cidale, and A. Granada. Slow radiation-driven wind solutions of a-type supergiants. *The Astrophysical Journal*, 737:18–22, 2011. [23](#)
- [11] M. Curé and D. Rial. The influence of rotation in radiation driven winds from hot stars ii. cak topological analysis. *Astronomy and Astrophysics*, 428(2):545–554, 2004. [15](#), [25](#), [26](#), [27](#), [29](#)
- [12] F.X. de Araújo. The equatorial plane of be stars: an outflow driven by optically thin lines? *Astronomy and Astrophysics*, 298:179–186, 1994. [13](#)
- [13] M. Fernández. Variabilidad en el viento de estrellas supergigantes b. soluciones hidrodinámicas. *Universidad Nacional de La Plata*, 2023. [17](#), [18](#)
- [14] D. Friend and D. Abbott. The theory of radiatively driven stellar winds. iii. wind models with finite disk correction and rotation. *The Astrophysical Journal*, 311:701–707, 1986. [10](#), [20](#), [22](#)

- [15] P. Glendinning. *Stability, Instability and Chaos: An Introduction to the Theory of Nonlinear Differential Equations*. Cambridge University Press, 1994. [27](#), [64](#)
- [16] M. Hirsch, S Smale, and R. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 2013. [65](#)
- [17] F. John. *Partial Differential Equations*. Springer US, 1975. [64](#)
- [18] W. Kaplan. *Advanced Calculus*. Perason, Addison-Wesley, 2002. [19](#)
- [19] S. Kato and J. Fukue. *Fundamentals of Astrophysical Fluid Dynamics*. Astronomy and Astrophysics Library, 2020. [18](#)
- [20] R. Kudritzki. Line-driven winds, ionizing fluxes, and ultraviolet spectra of hot stars at extremely low metallicity. i. very massive o stars. *The Astrophysical Journal*, 577:389–408, 2002. [26](#)
- [21] R. Kudritzki, J Plus, D.J. Lennon, K.A. Venn, F. Najarro J. Reetz, J.K. McCarthy, and A. Herrero. The wind momentum - luminosity relationship of galactic a- and b-supergiants. *Astronomy and Astrophysics*, 359:970–985, 1999. [10](#)
- [22] A. Pauldrach, J. Puls, and R. Kudritzki. Radiation-driven winds of hot luminous stars - improvements of the theory and first results. *Astronomy and Astrophysics*, 164:86–100, 1986. [10](#), [20](#), [22](#)
- [23] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer, 2007. [64](#)
- [24] J. Douglas Faires Richard L. Burden. *Numerical analysis*. Brooks/Cole, 2001. [29](#)
- [25] A. Rodríguez. Viscous radiation driven disks in fast rotating massive stars. *Universidad de Valparaíso*, 2022. [11](#), [20](#), [30](#), [35](#), [36](#), [37](#), [42](#), [43](#)