



LA DEMOSTRACIÓN EN EL MARCO DE LA CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Memoria de Título presentada por:

Silvia López Fernández
Ronald Olivares Canivilo
Carolina Peña Parraguez

**Para obtener el Título de Profesor de Educación Media en Matemática con Mención en
Didáctica**

Profesor Guía: Gladys González

Valparaíso, Noviembre 2011

Agradecimientos

A mis padres Silvia y Rogelio, primero que todo por regalarme la vida y hacer de ella la mejor infancia, adolescencia y adultez, ayudarme a enfrentarla de la mejor manera, brindándome las herramientas necesarias para poder ser cada día una mejor persona. Por estar siempre como una roca firme y estable en aquellos momentos de adversidad y también aquellos de felicidad, por ser mi cable a tierra, por ayudarme y amarme siempre, les doy infinitas gracias, los amo con toda mi alma.

A mi pololo Álvaro, por ayudarme cada vez que lo necesité y más aún acompañarme y apoyarme siempre de manera incondicional, y espero que en esta nueva etapa que comienzo, estés a mi lado como siempre has estado, ya que llenas por completo mi corazón de amor y alegría, te amo.

A mis hermanos Víctor y Danilo, por quererme y alegrarme en aquellos momentos en los que lo necesité, a mis sobrinos Ignacio, Vicente y Renato por regalarme infinitos momentos de felicidad, a la Tía María Elena y Madrina Inés por ser ambas como una segunda madre, escucharme, aconsejarme y preocuparse de mí siempre, familia gracias por todo, los amo.

A mis compañeros de Tesis, Carolina y Ronald, por el apoyo y amistad incondicional, gracias por sus enseñanzas y perseverancia durante este proceso.

A mis amigos y compañeros de Universidad, Marcela Guerra, José Robledo, Pamela Muñoz, y Abraham Bobadilla, y a todos aquellos que en algún momento estudiamos y nos ayudamos, gracias amigos, por su apoyo y paciencia en todas las circunstancias en el ámbito académico, y todos los que quedan fuera de aquello, gracias por sus consejos y sinceridad, los quiero y los llevo siempre en mi corazón.

Gracias Dios, por acompañarme durante toda la vida y por todas las personas que me rodean, por regalarme la dicha de haberlos conocido y aprender, reír, disfrutar, etc. de cada uno de ellos.

Soledad López

Agradecimientos

Qué difícil es escribir un agradecimiento, pues son tantas las cosas que se vienen a la mente... Sin embargo no comenzaré agradeciendo, pues lo haré dedicando mi trabajo a cuatro personas que han marcado este proceso.

En primer lugar a aquella persona que cada día me preguntó ¿Cómo te fue en el colegio? (a pesar que ya estaba finalizando la Universidad), mi querido abuelo, esto es para ti... porque sé que estarías orgulloso y muy feliz en este momento, en segundo lugar les dedico esto a mis sobrinos Tomás, Luciano y Carlita, pues agradezco cada día el hecho que sean parte de mi vida.

Agradezco a muchas personas... en primer lugar a mis padres que cada día me motivaron a luchar por mis metas y sueños, a mis hermanos por escucharme y aguantarme. A toda mi familia, mis abuelos, mis tíos, mis primos, que siempre estuvieron presentes brindándome su ánimo, alegría y palabras de aliento. A mis amigos incondicionales Carol y Javier, que siempre creyeron en mí.

Algo que siempre agradeceré es el hecho de haber tenido la oportunidad de conocer a tanta gente maravillosa en todos estos años, particularmente a Pamela que desde el primer día de la Universidad me brindó su amistad incondicional y sus ricos almuerzos. Soledad y Ronald mis compañeros de tesis, gracias amigos por ser como son y por hacerme participe de sus vidas, serán unos grandes docentes y me siento orgullosa de ser su amiga y compañera en este proceso.

Obviamente no puede faltar la persona que me hace reír cada día, aquel que me acompaña, me aconseja y me cuida, Nicolás gracias por ser parte de mi vida y por hacerme participe de la tuya. Gracias a toda tu familia por ser como son y por apoyarme en todos los momentos.

Para finalizar quiero agradecer a todos aquellos profesores que me han enseñado todo lo que se, especialmente a aquel docente que admiro y que gracias a él estudié esta carrera, Profesor Ramón, gracias de verdad.

Carolina Peña

Agradecimientos

Gracias a Dios

Por permitirme llegar hasta este momento tan importante de mi vida y lograr esta meta en mi carrera.

Gracias a mis padres y hermanos

Por su preocupación y apoyo durante estos años de estudio

Gracias a Pamela Muñoz Stuardo

Por su dedicación, consejos y amor entregado. Gracias por ser parte de mi vida

Gracias a mis compañeras de Tesis

Por sus consejos, enseñanzas y ayuda durante el lapso de mi tesis.

Ronald Olivares

Índice General

Capítulo 1:	Antecedentes y Objetivos de la investigación.....	8
Capítulo 2:	Marco Teórico.....	13
	2.1 Ingeniería Didáctica.....	13
	2.2 Niveles de Van Hiele.....	15
	2.3 ¿Qué es demostrar?	17
	2.4 Acciones de la actividad demostrativa.....	19
	2.5 Congruencia de Triángulos.....	24
	2.6 Una mirada histórica de la demostración.....	28
	2.7 Estudios relacionados a la actividad demostrativa.....	29
Capítulo 3:	Marco Metodológico.....	31
Capítulo 4:	Desarrollo de la Investigación.....	35
	4.1 Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media en su Actualización Curricular 2009 y Mapas de Progreso.....	35
	4.2 Descripción de textos escolares.....	44
Capítulo 5:	La propuesta. Diseño, experimentación y evaluación.....	51
	5.1 Planificación.....	51
	5.2 Ingeniería de la situación de aprendizaje 1.....	53
	5.3 Ingeniería de la situación de aprendizaje 2.....	78
	5.4 Ingeniería de la situación de aprendizaje 3.....	92
	5.5 Ingeniería de la situación de aprendizaje 4.....	114
	5.6 Ingeniería de la situación de aprendizaje 5.....	124
	5.7 Ingeniería de la situación de aprendizaje 6.....	134
	5.8 Ingeniería de la situación de aprendizaje 7.....	155
	5.9 Ingeniería de la situación de aprendizaje 8.....	169
Capítulo 6:	Conclusiones y sugerencias.....	181
	Bibliografía.....	185

Capítulo 1. Antecedentes y Objetivos de Investigación

Antecedentes de Investigación

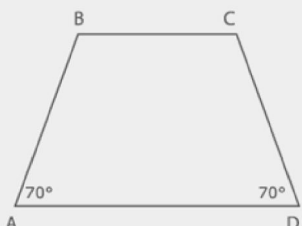
La enseñanza de la Matemática ha sido durante años objeto de críticas debido a los bajos resultados obtenidos en diversas evaluaciones realizadas, tanto de índole nacional como internacional. En particular podemos considerar las siguientes evidencias:

La prueba internacional de Matemática TIMSS¹ ejecutada el año 2003 constó de 194 preguntas, dividida en los siguientes ejes temáticos: Números, Álgebra, Geometría, Medición y Estadística. Ésta fue rendida por alumnos de octavo año básico del país, donde el promedio internacional fue de 467 puntos, Chile obtuvo 387 puntos ubicándose en el lugar 38 de 49 países y quedando claramente bajo el nivel promedio internacional (Ministerio de Educación, 2004).

A modo de ejemplo se indica la siguiente pregunta planteada en la prueba, la cual se encuentra directamente relacionada con nuestro trabajo, pues utiliza la noción de congruencia y como habilidad la forma de razonar del alumno, hay que tener en cuenta que la prueba señala las siguientes conductas que reflejan esta habilidad:

- Hipotetizar / Conjeturar / Predecir
- Analizar
- Evaluar
- Generalizar
- Conectar
- Sintetizar / Integrar
- Resolver problemas no rutinarios
- Justificar / Probar

ABCD es un trapecio.



Otro trapecio, GHIJ (no mostrado), es congruente (de igual tamaño y forma) con ABCD. El ángulo cuyo vértice es G y el ángulo cuyo vértice es J miden 70° cada uno. ¿Cuál de estas afirmaciones podría ser verdadera?

- Ⓐ GH = AB
- Ⓑ El ángulo cuyo vértice es H es un ángulo recto.
- Ⓒ Todos los lados de GHIJ tienen la misma longitud.
- Ⓓ El perímetro de GHIJ es 3 veces el perímetro de ABCD.
- Ⓔ El área de GHIJ es menor que el área de ABCD.

Tópico principal	Congruencia y semejanza
Habilidad	Razonar
Clave	A
% respuesta correcta Chile	38,6
% respuesta correcta Internacional	60,6
Presente en currículo	Sí
Nivel de logro	Intermedio

(Ministerio de Educación, 2004, p.23)

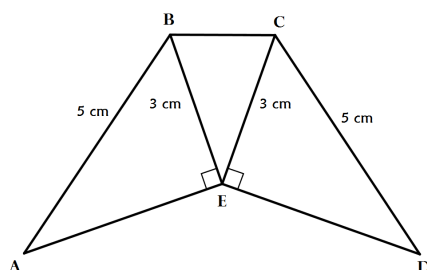
¹ El Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS) es una prueba que se realiza a nivel internacional, la cual mide los logros de los estudiantes en esas áreas. El Centro de Estudios Internacionales de la Universidad de Boston, en Estados Unidos, dirige las distintas actividades del diseño, desarrollo, implementación y análisis de los resultados del estudio. En Chile, TIMSS está a cargo de la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación (Ministerio de Educación, 2004).

La situación planteada en la figura anterior sólo el 38,6% de los alumnos en Chile fueron capaces de resolver el problema, lo cual supone una falencia dentro del tema de congruencia de figuras planas relacionadas con la habilidad de razonar de los alumnos.

Otra evidencia se revela en los resultados de la prueba SIMCE, realizada a todos los segundos años medios del país el año 2008. La cual consta de 45 preguntas que se dividen en los siguientes ejes temáticos: Números, Álgebra, Funciones, Probabilidades y Geometría.

Mostramos a continuación un ejercicio planteado en la prueba anteriormente nombrada con sus respectivos resultados obtenidos a nivel nacional²:

Observa la siguiente figura:



Claudia afirma que el triángulo AEB y el triángulo EDC son congruentes.

¿Es cierto lo que afirma Claudia?

SI ____

NO ____

Escribe tus argumentos y señala a continuación, los datos que consideras necesarios para fundamentar tu respuesta.

² El Ministerio de Educación, en el texto relativo a los resultados de la prueba SIMCE 2008 sólo muestra seis ejercicios de los cuarenta y cinco. El ejemplo presentado como antecedente corresponde a ser uno de ellos, siendo el único que aborda el tema de congruencia y que tiene como objetivo la verificación de un enunciado.

El problema presentado responde a las siguientes especificaciones:

Objetivo fundamental relacionado	Contenido mínimo obligatorio relacionado	Objetivo de evaluación
Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la proporcionalidad, del lenguaje algebraico inicial y de la congruencia de figuras planas.	Congruencia de dos figuras planas. Criterios de congruencia de triángulos.	Verificar la congruencia de dos triángulos en una figura geométrica compuesta, aplicando o refiriéndose al Teorema de Pitágoras y/o criterios de congruencias.

En esta pregunta, los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Respuesta	% de estudiantes del país
Correcta	2 %
Parcialmente incorrecta	25 %
Incorrecta	70 %
Omisión	3 %

(Ministerio de Educación Simce, 2009, p.30 y p.54)

De los resultados podemos ver que la problemática no sólo es de algunos sectores escolares, sino más bien, una dificultad general del alumnado chileno, pues en cuanto a porcentaje sólo el 2% de los estudiantes son capaces de resolver de manera correcta este tipo de ejercicio.

En relación a los alumnos que responden al problema de forma parcialmente incorrecta, la parcialidad de sus respuestas puede deberse a que éstos “se contentan con una simple verificación o “creen” en la propiedad, pues les resulta evidente. Aún cuando puedan llegar a comprender que en ciertos momentos es necesario demostrar una propiedad, la dificultad de asumir la exigencia de las demostraciones en las ciencias formales se complica más aún cuando ellos son quienes realizan estas demostraciones. Las distintas formas del pensamiento lógico no siempre son logradas satisfactoriamente por los alumnos en la escuela” (Crespo y Farfán, 2005, p.6). Por lo mismo, dentro del presente trabajo se dará énfasis en la diferencia de una explicación, prueba y demostración.

Por otra parte, tomando en consideración lo que el Ministerio de Educación propone en relación a la demostración, donde se hace énfasis en la gradualidad de la adquisición de esta habilidad, señalando que ésta “se introduce, en los primeros niveles como verificación en casos particulares, luego como justificación de construcciones o de relaciones entre objetos geométricos, para luego avanzar en formalidad de acuerdo con la madurez de los estudiantes” (Ministerio de Educación, 2010, p.4) y tomando en consideración las evidencias mostradas

anteriormente, creemos que la habilidad de demostrar en geometría, específicamente en relación con la congruencia de triángulos es un tema complejo de trabajar, tanto para el alumno como para el profesor. Estos motivos dieron la base para realizar nuestra propuesta, que pretende entregar herramientas para sobrellevar ésta problemática.

La propuesta a presentar tiene como fin responder las siguientes interrogantes relacionadas con la demostración en geometría, referente a la congruencia de triángulos:

- ¿Qué estrategias se utilizan en los textos aprobados por el gobierno para desarrollar la habilidad de demostrar en el tema de congruencia de triángulos?
- ¿Qué conocimientos debe poseer el alumno o qué debe hacer para tener éxito en la demostración de problemas relativos a congruencia de triángulos?

Por lo anteriormente descrito, este trabajo presenta una propuesta que busca que los alumnos mejoren sus aprendizajes relativos a la deducción matemática y en particular en el ámbito de la congruencia de triángulos. En ella se crean instancias para que el estudiante participe activamente en la construcción de sus aprendizajes, ayudándolo así a potenciar su pensamiento deductivo en el tema considerado; lo cual creemos que puede repercutir en las producciones posteriores de los estudiantes en el área de la geometría.

Objetivos de la Investigación

Objetivo General de la Investigación

Diseñar una propuesta con el fin de potenciar el pensamiento deductivo en el ámbito de la congruencia de triángulos, de estudiantes de segundo año medio.

Objetivos Específicos de la Investigación

- Describir el marco curricular de educación básica y media en su actualización 2009, mapas de progreso y programas de estudio, focalizando en el conocer las orientaciones emanadas del Ministerio de Educación en relación al desarrollo del pensamiento deductivo de los(as) estudiantes en el ámbito geométrico de la congruencia de triángulos en el nivel de primer año medio.
- Describir las situaciones planteadas en textos de estudios de matemáticas de uso en aulas chilenas, con el fin de conocer como se abordan los procesos deductivos en el tema de Congruencia de Triángulos en el nivel de primer año medio
- Confeccionar y llevar a la práctica actividades organizadas, relacionadas con la Congruencia de Triángulos que fomenten el razonamiento matemático.

Capítulo 2. Marco Teórico

2.1 Ingeniería Didáctica

La propuesta se sustenta bajo una ingeniería didáctica caracterizada “por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clases, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (M. Artigue y otros, 1995, p.36). En general, esta modalidad de trabajo posee dos tipos de niveles, el de micro ingeniería y macro ingeniería, la elección de uno o del otro obedecen al nivel de envergadura de los fenómenos que están involucrados en la investigación.

En particular este trabajo se guía por una ingeniería didáctica en su nivel micro, pues acá se tiene como objeto de estudio un tema determinado, tomando en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos en el aula.

Antes de detallar las fases de una ingeniería didáctica, es necesario evidenciar que este método será aplicado a cada una de las actividades de forma individual, utilizando este tipo de metodología como un instrumento de validación.

En lo que sigue se dará un breve resumen de las fases a utilizar siguiendo una micro ingeniería didáctica:

1. Primera fase: Análisis Preliminar.

En una investigación es necesario un análisis preliminar, en donde se debe tener en cuenta el marco didáctico general, los objetivos de la investigación y los conocimientos didácticos relacionados con el tema.

2. Segunda fase: Concepción de la propuesta y Análisis a priori de las situaciones de aprendizaje.

Dentro de esta etapa se debe crear la propuesta que tenga relación con el problema a estudiar, además podemos definir conocimientos previos de los alumnos, tipos de pistas que se dan junto al enunciado, como se entregan los ejercicios, entre otros.

Artigue dice que el análisis a priori es un conjunto de hipótesis que tienen por objetivo determinar de qué manera las actividades o selecciones realizadas permiten controlar

comportamientos a futuro de los alumnos. Este análisis comprende una parte descriptiva y una predictiva, en el cual se debe:

- Analizar qué podría ser lo que está en juego en una situación para un estudiante en función de las posibilidades de acción, de selección, de decisión, de control y de validación de las que él dispone, una vez puesta en práctica en un funcionamiento casi aislado del profesor.
- Prever los campos de comportamientos posibles y tratar de demostrar cómo el análisis realizado permite controlar su significado y asegurar, en particular, que los comportamientos esperados, si intervienen, sean resultado de la puesta en práctica del conocimiento contemplado por el aprendizaje.

3. Tercera fase: Experimentación

En esta fase se lleva a cabo la implementación de la propuesta, en una población de estudiantes, iniciándose el contacto entre el investigador y los alumnos.

En esta fase se debe:

- Explicitar los objetivos y condiciones de realización de la investigación a los estudiantes que participarán de la experimentación.
- Aplicar los instrumentos de investigación.
- Registrar las observaciones realizadas durante la experimentación.

4. Cuarta fase: Análisis a Posteriori y Evaluación

Última fase de la ingeniería didáctica, la cual se basa en una serie de datos recolectados a lo largo de la experimentación, es decir, las observaciones realizadas de las secuencias de enseñanza, al igual que las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella.

Como una manera para validar el trabajo, es decir aceptar la hipótesis o refutarla, confrontando los análisis a priori con los análisis a posteriori.

2.2 Niveles de Van Hiele

Dentro de la propuesta los alumnos deberán pasar por un proceso secuencial de enseñanza-aprendizaje, para ello nos basamos en la teoría de los Niveles de Van Hiele, la cual fue diseñada por dos profesores de enseñanza secundaria, que cada año eran testigos de la misma problemática: los alumnos no entienden los contenidos, aunque se les presente varias veces y de formas distintas; en ocasiones no saben seguir el proceso de resolución de un ejercicio, otras veces no entienden lo que el profesor les pide, o no pueden dar una interpretación a ciertas problemáticas presentadas.

Los niveles de razonamiento de Van Hiele

En lo que sigue se describen cada uno de los niveles de razonamiento planteados por estos profesores, los cuales han sido extraídos del libro *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática* de Gutiérrez y Jaime (1995).

Los niveles son cinco y se suelen nombrar con los números del uno al cinco. Estos niveles se denominan de la siguiente manera:

- NIVEL 1: Visualización o Reconocimiento
- NIVEL 2: Análisis
- NIVEL 3: Ordenación o Clasificación
- NIVEL 4: Deducción formal
- NIVEL 5: Rigor

Es importante señalar que un estudiante puede estar, según el contenido trabajado, en un nivel u otro.

Nivel 1

Los alumnos consideran las figuras como un todo global, por lo que no se toman en cuenta propiedades ni elementos de ésta. Por ejemplo, en el caso de las figuras geométricas, las asocian a elementos de su vida diaria, lo que les permite distinguir entre figuras triangulares, cuadradas, rectangulares, etc. Otra característica de este nivel es que el alumno no es capaz de realizar generalizaciones y sus “justificaciones se basan en la percepción visual haciendo

referencia a objetos reales o simplemente menciona el nombre del concepto” (Gutiérrez y Jaime, 1995, p.29).

Nivel 2

En este nivel los alumnos pueden identificar propiedades y sus características de manera independiente no tomando en cuenta la implicancia de unas con otras. Además el autor afirma que “el razonamiento propio de este nivel incluye el descubrimiento y la generalización de propiedades a partir de la observación en unos pocos casos”.

“Por ejemplo, si pedimos la demostración de la propiedad de que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180° , los estudiantes se limitarán a dibujar uno o dos triángulos y medir sus ángulos; o bien dirán que en los triángulos los ángulos miden 60° , 60° y 60° por lo que su suma es 180° ”. (Gutiérrez y Jaime, 1995, p.30).

Nivel 3

Este nivel se caracteriza principalmente por la comprensión y la posibilidad de establecer relaciones, lo que trae como consecuencia que “en las demostraciones el punto de partida suele ser la experimentación pero el alumno siente la necesidad de recurrir a alguna justificación general, basada en propiedades conocidas que conduzcan directamente al resultado” (Gutiérrez y Jaime, 1995, p.31); además realiza implicaciones de algunos resultados con lo cual es capaz de entender y reproducir una demostración formal (no compleja) cuando se le explica paso a paso”.

Nivel 4

Este nivel se encuentra caracterizado por la comprensión y el empleo del razonamiento formal, pues aquí “se efectúan demostraciones formales, encadenando diversas implicaciones simples para llegar desde la hipótesis hasta la tesis” (Gutiérrez y Jaime, 1995, p.32).

Nivel 5

Este nivel se caracteriza principalmente con el hecho de que en esta etapa de razonamiento, el alumno “logra manejar diversas geometrías, provenientes de diferentes sistemas axiomáticos” (Gutiérrez y Jaime, 1995, p.28).

Propiedades del modelo de Van Hiele

Existen propiedades, las cuales son importantes de mencionar para una mejor comprensión del modelo:

- Especificidad del lenguaje, según los autores esto tiene relación con que cada nivel tiene un lenguaje propio. Tiene directa relación con la interpretación que se le da a ciertos vocablos y expresiones (Gutiérrez y Jaime, 1995).
- Paso de un nivel al siguiente, no se da de manera brusca, ya que investigaciones han analizado este hecho, y han dado a conocer que existe un periodo durante el cual aparece el razonamiento de dos niveles consecutivos.
- Globalidad o localidad, los autores afirman que esta propiedad presume que un individuo tendría igual nivel de razonamiento en todos los conceptos de geometría, pero investigaciones parecen indicar que eso no sucede, que el “nivel de razonamiento es local, o sea que si un individuo razona a cierto nivel en un concepto, por ejemplo, “polígonos”, es posible que razone a otros niveles con otros conceptos, por ejemplo, “isometrías”.”(Gutiérrez y Jaime, 1995, p.33).
- Instrucción, para adquirir y desarrollar los continuos niveles de Van Hiele, no depende de un aspecto biológico, sino más bien de la enseñanza recibida y la experiencia de cada persona.

3.3 ¿Qué es demostrar?

La propuesta educativa que se presenta tiene directa relación con la habilidad de demostrar en geometría, pero la pregunta que se requiere responder para un buen entendimiento del tema es ¿Qué es demostrar?, si se explica o argumenta el proceso de un cierto problema, ¿estamos frente a una demostración? Para responder estas y varias preguntas que puedan ir surgiendo al cabo de la investigación, citaremos a R. Duval que en su trabajo *Argumentar, Demostrar y Explicar, Ruptura o Continuidad Cognitiva*, define y caracteriza cada uno de estos conceptos.

Al hablar de demostración el autor expresa que el objeto de la demostración es la verdad y obedece a criterios de validez. Para una mejor comprensión de esta definición, Duval precisa y

caracteriza la argumentación y la explicación, conceptos relevantes dentro de nuestra investigación.

El autor define la argumentación como un tipo de razonamiento que busca justificar una razón o una tesis, para esto es necesario distinguir dos procesos; primero la producción de razones o argumentos y luego la aceptabilidad de estos.

La producción de razones responde a una serie de preguntas que tienen por finalidad incentivar a los alumnos a justificar cada una de las respuestas dadas, éstas se clasifican en:

- Preguntas “de dicto”: ¿Por qué afirmas que...? ¿Por qué expresas que...? Las cuales para ser respondidas necesitan de al menos un argumento.
- Preguntas “de re”: ¿Por qué se produce...? ¿Por qué se obtiene...? Las cuales requieren de una explicación para ser respondidas.

La aceptabilidad de argumentos tiene relación en que estos sean acordes al tema tratado y además, tengan fuerza y pertinencia, es decir, que resista un contra argumento y que estos sean evidentes, necesarios, entre otros. La idea principal es que un argumento con estas características lleve a la convicción o el rechazo de una afirmación.

Para Duval la argumentación encuentra sus raíces en la justificación y una parte importante para justificar es explicar, proceso que consiste en dar una o más razones para hacer comprensible un dato, ya sea un fenómeno, un comportamiento, un resultado, entre otros.

Duval afirma que argumentar no es demostrar, pues postula que si bien ambos son tipos de razonamientos lo que diferencia uno de otro es que “una demostración requiere de un razonamiento válido con el fin de llegar a una verdad, sin embargo la argumentación tiene por finalidad la convicción sin necesidad de obedecer a criterios de validez” (Duval en Codina y Lupiañez, 1999, p.7).

Un razonamiento deductivo válido está regido por la regla de implicación, Modus Ponens, es decir, se obtiene una conclusión B, a partir de las premisas que están en la proposición A y $A \Rightarrow B$ (Duval en Codina y Lupiañez, 1999).

2.4 Acciones de la actividad demostrativa

En nuestra propuesta es de necesidad primordial conocer algunos fundamentos concretos referentes a la actividad demostrativa, ya sea en un contexto de aula como en un enfoque docente, para tener estas referencias citaremos a Perry, Camargo, Samper y Rojas que en su investigación *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemática*, afirman que en la actividad demostrativa se combinan dos aspectos interrelacionados como son el proceso y el producto, el proceso “incluye acciones propias de la heurística como visualizar, explorar, analizar, conjeturar y verificar, siempre y cuando movilicen el razonamiento hacia la búsqueda de validación”¹ estas acciones deben dar significado a la tarea de argumentar aceptando afirmaciones y originando los elementos para garantizar la verdad de dichas aseveraciones. De manera similar si nos enfocamos en el aspecto producto tenemos que “incluye acciones propias de la práctica de justificar, que movilizan el razonamiento argumentativo hacia la formulación de explicaciones, pruebas o demostraciones formales”¹.

Estos dos aspectos, ante algún tipo de problema que despierta el interés de los alumnos, se relacionan de tal modo que en una primera instancia las acciones implicadas en el proceso de la actividad demostrativa activan el razonamiento poniendo en juego conocimientos previos, ideas nuevas que surgen de la experiencia y argumentos de carácter diverso que permiten construir un discurso ante la necesidad de convencerse o convencer a otros de la validez de un enunciado que genere como producto una explicación, una prueba o una demostración formal. Ahora bien se ha dicho que los aspectos proceso y producto implican distintas situaciones, en lo que sigue se hace una referencia a las acciones que conforman el aspecto proceso y a las características de cada acción relacionada al producto, cabe mencionar que los autores afirman que la organización de cada una de las acciones no implican orden alguno pero si una secuencia que se ve como natural dentro de la actividad demostrativa.

¹ Perry y otros, 2006, p.58

Acciones implicadas en el aspecto Proceso

- Visualización: “es una mirada sobre alguna representación grafica, dada o construida que enfoca elementos de ésta para detectar, percibir o evocar propiedades geométricas” ², acción que según los autores requiere como mínimo la identificación y determinación de figuras de dimensión igual o menor a la figura inicial, para así lograr principalmente la verificación de relaciones o propiedades geométricas, elemento fundamental para realizar cualquier demostración, además la visualización permite comenzar a diferenciar entre el significado de dibujo y figura. Ahora bien, la visualización permite comenzar a diferenciar éstos al recolectar la información que nos proporcionan, ya que si el alumno toma en consideración el primero (dibujo) no logrará demostrar un determinado hecho, ya que su argumentación será basada sólo por la intuición, a diferencia de la segunda (figura) el alumno logrará tener presente dentro de sus argumentos propiedades y hechos concretos que se pueden utilizar en la actividad demostrativa.
- Exploración: se “refiere a una investigación empírica hecha sobre una representación grafica, a través de acciones tales como medir, calcular, construir y constatar, donde se consideran uno o más casos, el objetivo principal de la exploración es descubrir algún tipo de propiedad o relaciones entre estas” ². En este tipo de demostración, el razonamiento está muy cercano a la argumentación informal que se realiza en la vida cotidiana en la que se establecen asociaciones espontáneamente, para sustentar una tesis o una opinión. Es útil cuando se comienzan procesos demostrativos, sobre todo si las figuras contribuyen a la identificación de propiedades geométricas relevantes.
- Formulación de Conjeturas: establecimientos de enunciados de los que se tiene seguridad los cuales son expresados de modo general. Esta acción hace referencia al acto de postular una afirmación fruto del convencimiento personal donde la visualización y exploración son la base donde se obtienen los argumentos para explicar

² Perry y otros, 2006, p.59

o convencer a otros, o comunicar una idea geométrica ³.

- Verificación: en esta etapa se concretan una serie de “acciones visibles sobre una representación grafica para poner a prueba alguna conjetura establecida” ³.

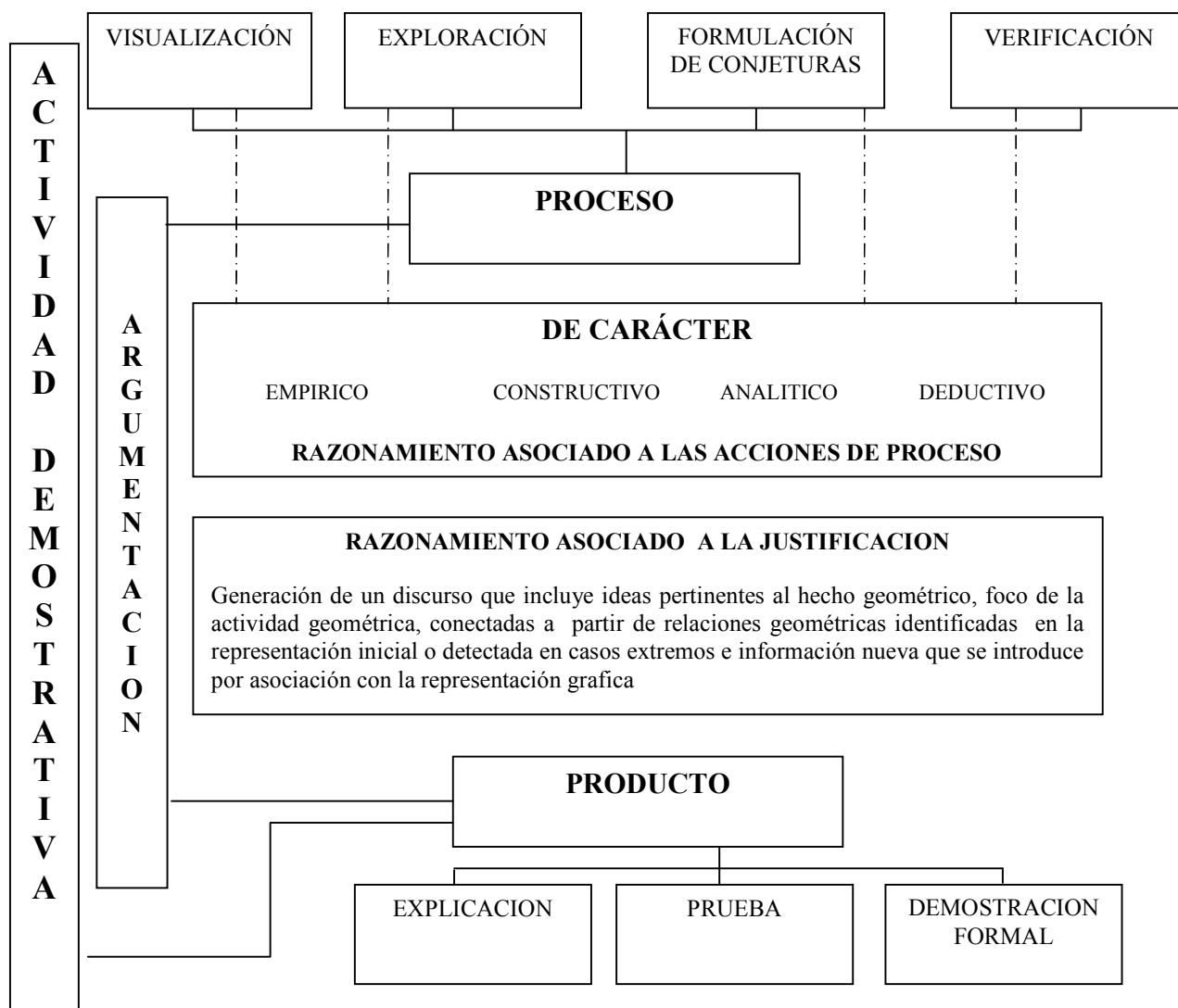
Acciones Implicadas en el aspecto Producto

- Explicación: “justificación de carácter empírico basada en la remisión a una figura para mostrar lo que en ella se ve y hacer señalamiento de resultados empíricos obtenidos en la exploración o de información proveniente de otras fuentes” ³, en otras palabras la explicación es un discurso construido según reglas propias de decisión de la verdad, que la mayor parte de las veces se da por medio del lenguaje natural, mediante el cual se intenta que los demás entiendan la veracidad de una afirmación.
- Prueba: justificación parcial en la que se explicitan afirmaciones y razones referidas a propiedades geométricas generales, sacadas del conjunto de posibilidades estudiadas y de nuevas relaciones de dependencia encontradas en las acciones realizadas en la figura, es decir, la prueba es un discurso, reconocido y aceptado por el grupo escolar, mediante el cual se explica una proposición los autores afirman que “el paso de explicación a prueba es un proceso social lo cual hace que la prueba no sea algo acabado, pues puede cambiar con la evolución de los saberes en el tiempo” ⁴.
- Demostración Formal: “justificación de carácter deductivo que explicita y encadena afirmaciones y sus respectivas razones referidas a un sistema axiomático y que lleva desde la información dada hasta aquella que se desea demostrar” ⁴ es decir, corresponde a una serie de enunciados que se organizan, siguiendo un conjunto bien definido de esquemas aceptados e impuestos por la comunidad matemática, los autores aclaran que este tipo de justificación debe pasar el escrutinio de la comunidad matemática.

³ Perry y otros, 2006, p.60

⁴ Perry y otros, 2006, p.62

El siguiente cuadro presenta una descripción esquemática de lo que los autores consideran como actividad demostrativa



El vínculo entre todas estas acciones, ya sean del aspecto proceso o del aspecto producto se establece por medio del razonamiento de tipo argumentativo que es ligado a las acciones y a la generación de un discurso que incluye ideas pertinentes al aspecto geométrico en estudio y que intenta convencer a alguien en particular de la veracidad de la conjetura, la justificación obtenida se acerca a la demostración formal en la medida que los razonamientos asociados a las acciones referidas al proceso sean cada vez mas de carácter deductivo y menos de tipo empírico y constructivo.

Ahora bien, los autores postulan que es imprescindible crear un ambiente propicio para fomentar la discusión libre y espontánea, en donde es el alumno el encargado de descubrir relaciones geométricas y sustentar su decisión ante el aula. Dejando claro que este tipo de ambiente no se construye de un día para otro, por lo cual, desde temprana edad se debe incitar al estudiante a explicar sus ideas y defenderlas, a través de la argumentación con miras de lograr consensos, tanto en cuestiones exclusivas del aula de matemáticas como en aquellas que no lo son.

Además, manifiestan que si al alumno se le presenta la matemática como un cuerpo de verdades bien establecidas, él no sentirá la necesidad de la demostración y reducirá el aprendizaje de ésta al dominio de algoritmos y reconocimiento de figuras geométricas. Si no está activamente involucrado en la construcción de su conocimiento, a través de la investigación, la formulación de conjeturas y la validación, inicialmente de manera informal, todo esfuerzo para lograr que construya pruebas será en vano.

Para la preparación de la demostración, según los autores, se debe desarrollar el lenguaje matemático, ampliar las imágenes conceptuales de los objetos matemáticos involucrados, tener la capacidad de desconfigurar y reconfigurar las representaciones geométricas, reconocer la relación de dependencia entre unas proposiciones y otras, sentir la necesidad de validar conjeturas y poder hacerlo con razonamientos visuales y/o informales. En el texto se deja de manifiesto que no todo estudiante debe llegar al extremo de construir demostraciones formales pero deben tener la preparación que les permita acceder a ellas, si lo desea.

Finalmente afirman que la forma de validar depende de muchos factores, entre ellos el grado de evolución del razonamiento y de conocimientos, además al desarrollar una propuesta para

el estudio de la geometría esta deberá partir de un acercamiento informal y avanzar hacia la construcción paulatina del sistema axiomático que induce a los estudiantes a enfrentarse a la tarea de demostrar, de manera cada vez más formal (Perry y otros, 2006).

2.5 Congruencia de Triángulos

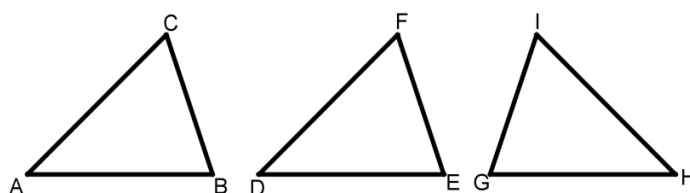
En aspectos generales la congruencia se refiere al hecho de poseer dos figuras con misma forma y tamaño, por ejemplo al poner una sobre la otra deberán coincidir de manera exacta.

Para nuestra investigación relativa al tema de congruencia de triángulos, se definirán algunas notaciones, siguiendo las presentadas por Edwin E. Moise para segmentos y ángulos, se tiene:

(1) $AB \cong CD$, significa, por definición, que $\overline{AB} = \overline{CD}$.³

(2) Por definición, $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle PQR$ significa que $m\sphericalangle BAC = m\sphericalangle PQR$.

Ahora bien, observemos los siguientes triángulos:



De manera visual podemos notar que los tres triángulos son congruentes, por otro lado de manera experimental si tomamos al azar cualquiera de ellos y lo colocamos sobre otro, el calce de ambas figuras será de manera perfecta. Ahora bien, para mover el primero sobre el segundo, el autor señala que se deberá colocar A en D , B en E y C en F . Estas direcciones describen el movimiento a través de una correspondencia uno-a-uno entre los vértices del primer triángulo y los del segundo:

$$\begin{aligned} A &\leftrightarrow D, \\ B &\leftrightarrow E, \\ C &\leftrightarrow F. \end{aligned}$$

³ Aquí se utiliza como notación:

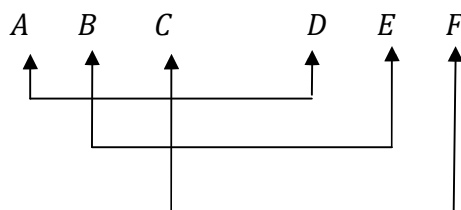
$\overline{AB}$: Segmento desde el punto A al punto B .

$\overline{AB}$: Longitud del segmento AB .

De manera similar el segundo triángulo puede acoplarse con el tercero por correspondencia, y también el primero con el tercero. Por otro lado, retomando la correspondencia del primer triángulo con el segundo, según el autor podemos señalar la misma correspondencia en una sola línea de la siguiente manera:

$$ABC \leftrightarrow DEF$$

Para este caso se debe asociar la primera letra de la izquierda con la primera de la derecha, la segunda con la segunda, y la tercera con la tercera, de la siguiente manera:



Ya que existe una correspondencia para asociar los vértices de ambos triángulos, también existe una correspondencia para asociar los lados y los ángulos, que según el autor sería de la siguiente manera:

La correspondencia asociada entre los lados es la siguiente:

$$\begin{aligned} AC &\leftrightarrow DF, \\ CB &\leftrightarrow FE, \\ AB &\leftrightarrow DE \end{aligned}$$

y la correspondencia asociada entre ángulos es la siguiente:

$$\begin{aligned} \sphericalangle CAB &\leftrightarrow \sphericalangle FDE, \\ \sphericalangle ABC &\leftrightarrow \sphericalangle DEF, \\ \sphericalangle BCA &\leftrightarrow \sphericalangle EFD. \end{aligned}$$

Definición. “Sean $\triangle ABC$, $\triangle DEF$, y una correspondencia uno-a-uno, entre sus vértices. Si cada par de lados correspondientes son congruentes, y cada par de ángulos correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una congruencia”.

Para la correspondencia

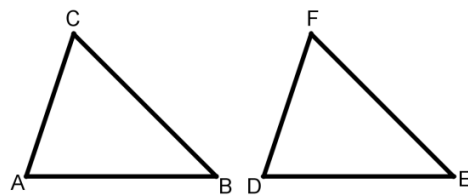
$$ABC \leftrightarrow DEF$$

“es una congruencia si las seis siguientes condiciones son verdaderas:

$$\begin{aligned} AB &\cong DE, & \angle CAB &\cong \angle EDF \\ AC &\cong DF, & \angle ABC &\cong \angle DEF, \\ BC &\cong EF, & \angle BCA &\cong \angle EFD. \end{aligned}$$

Si $ABC \leftrightarrow DEF$ es una congruencia, entonces escribimos”

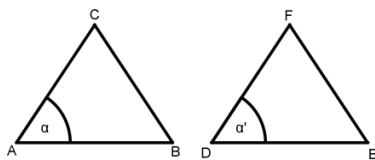
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$$



(Moise, 1968, p. 119-120)

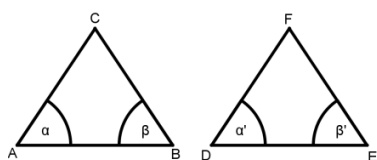
Para identificar la congruencia entre dos triángulos no será necesario revisar las seis condiciones, ya que para ello existen teoremas de congruencia, que para fines de nuestro trabajo sólo consideraremos los tres más usados en la enseñanza escolar de la matemática, específicamente en los cursos de enseñanza media:

Teorema L.A.L. “Sea una correspondencia entre dos triángulos (o entre un triángulo y sí mismo). Si dos lados y el ángulo incluido del primer triángulo son congruentes con las partes correspondientes del segundo, entonces la correspondencia es una congruencia” (Moise, 1968, p.121).



Si $AC \cong DF$, $AB \cong DE$ y $\angle CAB \cong \angle C'D'B'$, entonces
 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

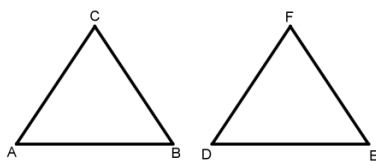
Teorema A.L.A. “Sea una correspondencia entre dos triángulos (o entre un triángulo y él mismo). Si dos ángulos y el lado incluido del primer triángulo son congruentes a las partes correspondientes del segundo, entonces la correspondencia es una congruencia”. (Moise, 1968, p.123).



Si $\angle CAB \cong \angle FDE$, $\angle ABC \cong \angle DEF$ y $AB \cong DE$,
entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

Teorema L.L.L. “Sea una correspondencia entre dos triángulos (o entre un triángulo y él mismo). Si los tres pares de lados correspondientes son congruentes, entonces la correspondencia es una congruencia.

Dicho de otro modo. Sean $\triangle ABC$, $\triangle DEF$, y una correspondencia $ABC \leftrightarrow DEF$. Si $AB \cong DE$, $BC \cong EF$ y $AC \cong DF$ entonces la correspondencia es una congruencia.” (Moise, 1968, p.124).



2.6 Una mirada histórica de la demostración

Bell en su libro *Historia de la Matemática* comenta que el origen histórico de la demostración es desconocido, aunque existen nociones que los antiguos Babilónicos, así como los Egipcios ocupaban la “demostración” hace más de dos mil años antes de Cristo, estos llevaron la demostración a un plano práctico con el objeto de solucionar problemas de la cotidianidad. Ahora bien, la concepción de la demostración desde los años de la Grecia antigua no ha tenido grandes modificaciones hasta nuestros días, ha conservado su característica fundamental, que es la de entender la demostración como un encadenamiento de deducciones, lo que el autor reafirma al plantear que “el estricto razonamiento deductivo tiene valores tanto estéticos como prácticos, puede decirse que las matemáticas comenzaron cerca de seis siglos antes de la Era cristiana. Su desarrollo inicial se completó cuando el ser humano se dio cuenta de que la experiencia práctica es muy compleja para describirla en forma precisa. Tampoco se sabe dónde y cuándo se llegó a esa conclusión, pero los geómetras de fines del siglo IV a.C. la aceptaron, como se manifiesta en sus trabajos. Así fue como Euclides estableció en ese siglo la conocida definición, un círculo es una figura plana circunscrita por una línea llamada circunferencia, y tal que todas las rectas trazadas de cierto punto interior, llamado centro, hacia la circunferencia, son iguales”. (Bell, 1949, p.18)

Ahora bien, a modo de síntesis de la noción de demostración durante la historia es que algunos autores⁴ hacen la siguiente clasificación en tres etapas:

- La primera corresponde a los tiempos de la cultura en Grecia, donde la demostración buscaba convencer en medio del debate.
- La segunda etapa correspondiente, se sitúa en el siglo XVII, en aquellos tiempos en que se buscaba que las demostraciones aclararan más que convencieran, donde los métodos de descubrimientos desempeñaban un papel fundamental.
- La tercera comienza en el siglo XIX, donde se regresa al rigor, que permitió hacer frente a nuevas concepciones de los objetos matemáticos, lo cual trajo consigo problemas de fundamentos de la Matemática y la aceptación de teorías no intuitivas y poco evidentes.

⁴ Por ejemplo, W. Campillay (2010, p.77) cita a Evelyn Barbin (IREM du Mans, Francia)

Además el autor manifiesta que durante la historia de la Matemática, la actividad de demostrar no ha sido una tarea simple, en ocasiones ha sido muy difícil, como es el caso de demostrar que el quinto axioma propuesto por Euclides era dependiente de los otros, trajo consigo interesantes aportes a la matemática, pero la tarea fue dura y tuvieron que pasar siglos para aclarar esta demostración, la cual trajo grandes frutos para la matemática (como el último Teorema de Fermat), por lo cual es de esperar que en el procesos de enseñanza aprendizaje, se generen obstáculos didácticos de origen epistemológicos, pues esto se encuentra en la historia misma de la validación de las proposiciones matemáticas.

2.7 Estudios relacionados a la actividad demostrativa

Muchos autores han dedicado sus esfuerzos a investigar en relación a la actividad demostrativa, estos estudios toman diversos enfoques de acuerdo a los puntos de vista de cada investigador, en general éstos se pueden clasificar en: históricas-epistemológicas, cognitiva y didáctica (Olivero en Samper y otros, 2006), puesto que nuestro trabajo está relacionado con la actividad demostrativa, en específico, en la línea cognitiva y didáctica se reseñarán algunas investigaciones en estas áreas.

Dentro de las investigaciones más conocidas se encuentran los estudios de Raymond Duval y Nicolás Balacheff, este último en su obra *Procesos de prueba en los alumnos de matemática* (2000) ha centrado sus estudios en la dificultad que tienen los estudiantes para demostrar dado que prefieren los argumentos empíricos más que los deductivos a la hora de justificar una afirmación matemática. Otros autores que también destacan son Dreyfus con su obra *Educational Studies in Mathematics* (1999) y Lulu Healy junto a Celia Hoyles en su trabajo *Justificar y demostrar en las matemáticas escolares* (1998) estos tres autores llegan a conclusiones similares referentes a que el currículo de matemática que se le ofrece al alumno no presenta actividades donde se logre potenciar la actividad demostrativa y más aun afirmar que el currículo en matemática se limita a presentar demostraciones ya resueltas sin implicar a los alumnos en la construcción de las mismas. Muy similar son los aportes de Alibert y Thomas cuya investigación *Advanced mathematical Thinking* (1991) se centra en los modelos de enseñanza de la demostración, destacan que la enseñanza se ha reducido a la presentación de demostraciones como productos acabados, sin permitir que los estudiantes participen en el

proceso de construcción donde la demostración se enfoca en los aspectos formales y no permite que los estudiantes desarrollen un sentido real y profundo del argumento involucrado.

Desde una perspectiva más enfocada en la búsqueda de mecanismos para lograr la motivación de demostrar en los alumnos se encuentra Harel (1998) y Tall (1995), ambos autores comparten la idea de atender las necesidades intelectuales de los alumnos, tomando en cuenta los distintos tipos de representación con que los alumnos pueden trabajar, además éstos evidencian que la demostración formal es la aceptada por la comunidad matemática en donde no sólo este tipo de razonamiento se debe incluir en el desarrollo cognitivo de la demostración sino también el desarrollo paulatino de la visualización y la explicación como diferentes tipos de justificación (Perry y otros, 1995).

Capítulo 3. Marco Metodológico

Metodología y Tipo de la investigación

La propuesta está ubicada dentro de la metodología de investigación de campo, debido a que se realizará en el aula estableciendo una interacción entre los objetivos del estudio y la realidad, enfocándose en una investigación cualitativa⁵, ya que se utilizarán datos como observación del trabajo y citas directas de los alumnos (referencias escritas y orales).

Al realizar la investigación de tipo cualitativa, en particular al implementar la propuesta, el docente debe interpretar las características esenciales del proceso, no debe imponer límites al utilizar o modificar los instrumentos preparados con antelación si atentan al propósito de nuestra investigación. Lo anterior queda reafirmado por Hernández, Fernández y Baptista (2003) los cuales dan a entender que para llegar a una mejor comprensión de la realidad tal cual es vivida por los sujetos en estudio, poco importa que el investigador haya previsto alguna u otra situación que en el camino fue víctima de modificaciones, donde la decisión de modificar el procedimiento de investigación inicial no debe ser considerada como un fracaso, es más bien, la metodología que incita al investigador a dejarse guiar por la situación tal cual es vivida por los sujetos al momento de realizar el trabajo de campo.

Diseño de la Investigación

La propuesta será regida por una micro ingeniería didáctica, a continuación detallamos los pasos a seguir en cada una de las fases establecidas, en forma específica para la presente investigación:

⁵ En términos generales los estudios cualitativos involucran la recolección de datos utilizando técnicas que no pretenden medir ni asociar las mediciones con números, tales como observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, discusión en grupo, evaluación de experiencias personales entre otros. Además los análisis cualitativos buscan comprender su fenómeno de estudio en su ambiente usual, donde la realidad es más palpable logrando un acercamiento más profundo del fenómeno.

Análisis Preliminar

- a. En esta fase se analizarán los documentos oficiales, llámense Marco Curricular y Mapa de Progreso, con el fin de estudiar y describir el desarrollo del razonamiento deductivo en los estudiantes que a nivel de propuesta gubernamental se espera.
- b. Se estudiarán textos escolares vigentes de primer año de enseñanza media, con el fin de describir la secuencia propuesta en cada libro que lleva al alumno hacia la deducción, especificando los tipos de problemas que se plantean para favorecer la capacidad demostrativa. La elección de estos textos fue de tipo no probabilístico donde el criterio de inclusión hace relación a la antigüedad de las publicaciones (máximo tres años), tener un enfoque destinado a la educación media municipalizada y ser editoriales reconocidas por el Ministerio de Educación.

En pos de estos criterios los textos escolares seleccionados fueron⁶:

- Matemática 1° medio. Eduardo Cid y Marcia Muñoz. Editorial Arrayan, año de publicación 2008.
 - Matemática. Cristian Reyes Reyes y Marisol Valenzuela Chandía. Editorial Mc Graw Hill, año de publicación 2009.
 - Matemática Primero Medio. Roberto Vidal Cortés, María Chicharro Ciuffardi y Soledad Montoya González. Editorial Zig – Zag, año publicación 2007.
- c. Se hace una referencia a algunos estudios anteriores relacionados con nuestra problemática y una breve reseña histórica de la demostración.

Concepción de la propuesta y análisis a priori

Tomando como referencia los estudios de Van Hiele, Duval y Perry, Camargo y Samper se creará una propuesta donde el alumno comenzará a partir de la intuición, pasando por la visualización y exploración de modo de adquirir la habilidad de formular y verificar una

⁶ En lo que sigue, se hace referencia a los textos escolares mediante el nombre de la editorial.

conjetura en pos de lograr, explicar, probar y finalmente demostrar formalmente proceso que se logra en el cuarto nivel de Van Hiele.

Además, se realizarán los análisis a priori relativos a cada una de las actividades de la propuesta.

Experimentación y Evaluación

Para llevar a cabo nuestra propuesta se considerarán alumnos de segundo año medio⁷ de un establecimiento de tipo particular subvencionado con financiamiento compartido. Se hace notar que la elección de los alumnos está sujeta a criterios desconociéndose la probabilidad que tienen los alumnos para integrar la muestra.

Se realizará una invitación a alumnos de segundo año medio de la institución, tomando como base lo siguiente:

Criterios de inclusión

- Asistencia obligatoria a cada clase, las cuales se realizarán dentro del mismo establecimiento, dos veces por semana, por un mes de duración.
- Compromiso con los procesos de enseñanza aprendizaje que se llevaran a cabo dentro del taller (si bien este punto no se puede predecir ni manejar, creemos importante recalcarles a los alumnos lo esencial que es para esta investigación su opinión y trabajo).
- Disposición a ser filmado y observado en cada clase.
- No habrá distinción de sexo y edad. Tampoco afectará en la selección el rendimiento académico de los alumnos.

Una vez realizada la invitación, cinco alumnos accedieron a participar en el taller, en relación al comportamiento y rendimiento académico de los estudiantes seleccionados se encuentran,

⁷ La elección de este nivel se propone para asegurarnos que el conocimiento a tratar (congruencia de triángulos) esté asimilado por los alumnos y la adquisición sea adyacente en el tiempo.

por opinión del docente de matemática del nivel, alumnos participativos que adquieren adecuadamente los conceptos, manteniendo un grado de disciplina correcto, sin embargo algunos de los estudiantes deambula entre la conversación con sus pares y prestar atención al docente lo que repercute, por propias palabras del profesor del sector en un parcial grado de aprendizaje que se manifiesta en un lento avance en los ejercicios planteados y mediana comprensión de los contenidos planteados.

Ahora bien, nuestra propuesta pretende describir y explicar la evolución de cada alumno durante el desarrollo de la misma, por ende se analizará no sólo los momentos de inicio o final que tiene cada uno, sino que más bien se tomará en cuenta todo el proceso de los estudiantes en el tiempo que dura el taller. Para describir el progreso de los alumnos durante la experimentación es que se recabarán los datos mediante una observación directa (o cualitativa), la cual “tiene como propósito explorar y describir ambientes y grupos” (Hernández y otros, 2003, Pág. 459). En base a esto se observará cómo se desenvuelve cada alumno dentro del contexto de estudio de acuerdo a la muestra seleccionada, qué caminos toma para resolver cierto problema o qué tipo de argumento utiliza para justificar sus afirmaciones.

En nuestra investigación, dentro de la técnica de recolección de datos, se prefiere la elección de dos instrumentos:

- La grabación de cada actividad, con el fin de complementar las observaciones en relación a los momentos de confrontación de los resultados por parte de los alumnos, el trabajo individual y colectivo respecto a las actividades planteadas y como instrumento de validación de algunas observaciones.
- Los registros escritos que los alumnos individualmente al desarrollar cada actividad esbozaron, estos presentan el planteo y resolución de cada problema con sus consiguientes argumentos y justificaciones.

Cada uno de estas técnicas no se asimilan en solitario sino más bien la interpretación e interacción entre todos permite sintetizar y esquematizar el trabajo de los estudiantes.

Capítulo 4. Desarrollo de la Investigación

4.1 Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media en su Actualización Curricular 2009 y Mapas de Progreso

Surge la pregunta en relación a ¿qué busca o qué espera el gobierno a través del Ministerio de Educación en torno al desarrollo de la actividad demostrativa en los alumnos? Para responder esta interrogante es fundamental ampararse en los documentos autorizados y confeccionados por dicha institución como son los Mapas de Progreso y los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media en su Actualización Curricular 2009, además de los textos escolares para la educación media.

Al hacer un catastro de éstos se puede dar luces de la implicancia del gobierno en cuanto al desarrollo del razonamiento deductivo en los alumnos.

En primer lugar se encuentra la Actualización Curricular, la cual intenta afrontar el razonamiento y la actividad demostrativa desde un punto de vista global, haciendo énfasis en el conocimiento matemático, aprendizaje de la matemática y de los aportes de ésta a la formación humana, además de una ampliación de la concepción de resolución de problemas.

Se sabe que este documento se organiza en torno a ejes curriculares, a saber: Geometría, Datos y Azar, Números y Álgebra, además como transversal a cada uno de estos ejes se definió el Razonamiento Matemático (Ministerio de Educación, Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media en su Actualización Curricular 2009). Ahora bien, como en nuestra investigación se toma como eje central la geometría, la Actualización Curricular propone tratar este eje con un énfasis en la generación de conjeturas y la verificación de éstas, además se agregan temas que resultan ser comunes e importantes al momento de lograr procesos de razonamientos en los alumnos, en particular se hace énfasis que la matemática se aprende haciendo matemática, reflexionando acerca de lo hecho y confrontando su propio trabajo con el conocimiento acumulado y sistematizado.

La siguiente tabla ha sido diseñada a partir de los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media en su Actualización Curricular 2009, en la cual se muestra la evolución de los contenidos y los objetivos fundamentales en el sector de geometría, desde el primer ciclo básico hasta el último ciclo de la enseñanza media.

Contenidos	Objetivos Fundamentales
1° básico	NB1: 1° y 2° básico
• Identificación de figuras geométricas: líneas rectas y curvas. • Identificación de lados y vértices en polígonos y caracterización según número de lados. • Exploración de prismas rectos de base triangular o rectangular, identificación de sus caras, aristas y vértices y caracterización en función del número y forma de las caras. • Resolución de problemas que implican comparar características de figuras planas y prismas rectos de base triangular o rectangular.	• Reconocer la existencia de una diversidad de formas en los objetos del entorno y representar algunas de ellas de manera simplificada mediante objetos geométricos, que pueden ser curvos o rectos, de una dimensión (líneas), de dos dimensiones (figuras planas) o de tres dimensiones (cuerpos geométricos). • Utilizar la imaginación espacial para anticipar y constatar formas que se generan a partir de otras, mediante procedimientos tales como yuxtaponer y separar diversas formas geométricas. • Identificar y comparar cuadrados, triángulos, rectángulos, cubos y prismas rectos, manejando un lenguaje geométrico básico. • Comunicar e interpretar información relativa al lugar en que están ubicados objetos o personas (posiciones); dar y seguir instrucciones para ir de un lugar a otro (trayectoria).
2° básico	
• Identificación de ángulos mayores, menores e iguales al ángulo recto y rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas. • Identificación y caracterización de cuadriláteros y triángulos en función del paralelismo, perpendicularidad y longitud de los lados. • Formación y transformación de figuras planas mediante yuxtaposición y corte de formas triangulares y rectangulares, transformación de cuerpos geométricos mediante yuxtaposición y separación de prismas rectos. • Resolución de problemas que implican comparar características de triángulos y cuadriláteros. • Estimación y medición de longitudes de objetos o distancias entre dos puntos utilizando unidades de medida informales o unidades estandarizadas e interpretación de información referida a longitudes.	

Contenidos	Objetivos Fundamentales
3° básico	NB2: 3° y 4° básico
• Comprender el concepto de perímetro y resolver problemas que impliquen su obtención usando instrumentos de medición y unidades de longitud. • Exploración de pirámides, cilindros y conos para su caracterización en función de las superficies y líneas que los delimitan.	• Caracterizar y comparar polígonos de tres y cuatro lados, manejando un lenguaje geométrico que incorpore las nociones intuitivas de ángulo y de lados paralelos y perpendiculares. Trazar polígonos de acuerdo a características dadas. • Percibir lo que se mantiene constante en formas geométricas de dos dimensiones sometidas a transformaciones que conservan su forma, su tamaño o ambas características. • Caracterizar y comparar prismas rectos, pirámides, cilindros y conos: utilizar el nombre geométrico; designar sus elementos como caras, aristas y vértices; armar cuerpos de acuerdo a características dadas. • Identificar y representar objetos y cuerpos geométricos en un plano. • Interpretar y elaborar representaciones gráficas de trayectorias.
4° básico	
• Comprender el concepto de área, estimar y medir áreas de rectángulos o de figuras que pueden descomponerse en rectángulos. • Representación bi y tridimensional de cuerpos.	

Contenidos 5° básico	Objetivos Fundamentales NB3: 5° básico
• Cálculo de área de triángulos y rectángulos. • Conjeturas acerca del área de triángulos y rectángulos si varían lados y/o altura. • Resolución de problemas en situaciones significativas en el plano y el espacio que implican el cálculo de áreas en triángulos, rectángulos y paralelogramos utilizando diversas estrategias.	• Utilizar planos para orientarse en el espacio físico. • Distinguir elementos de un cuerpo geométrico y establecer correspondencias entre un cuerpo y su representación plana. • Reconocer elementos en una figura geométrica y analizar los cambios que se producen en la figura al variar la medida de sus ángulos internos. • Distinguir perímetro y área como elementos uni y bidimensionales en una figura geométrica. • Percibir la significación de las fórmulas, en tanto medio para expresar relaciones entre magnitudes variables.

Contenidos 6° básico	Objetivos Fundamentales NB4: 6° básico
• Medir ángulos y establecer la relación entre la medida de los ángulos que se forman en rectas paralelas cortadas por una transversal. • Conjeturas y resolución de problemas acerca de la suma de ángulos interiores y exteriores de polígonos.	• Planificar el trazado de figuras sobre la base del análisis de sus propiedades, utilizando los instrumentos pertinentes. • Comprender los efectos que provoca en el perímetro o el área de cuadrados y rectángulos la variación de la medida de sus lados y recurrir a las razones para expresarlas.

Contenidos 7° básico	Objetivos Fundamentales NB5: 7° básico
• Construcción de triángulos (a partir de las medidas de sus lados y ángulos), rectas paralelas y perpendiculares. Determinación del punto de intersección de las alturas, transversales de gravedad, bisectrices y simetrales en un triángulo. • Comprender y aplicar teorema de Pitágoras. • Determina el volumen en prismas rectos y pirámides, conjeturar acerca del perímetro de polígonos y volumen de dichos cuerpos al variar uno o más de sus elementos lineales.	• Utilizar el razonamiento proporcional como estrategia para resolver problemas numéricos y geométricos. • Analizar familias de figuras geométricas para apreciar regularidades y simetrías y establecer criterios de clasificación.

Contenidos 8° básico	Objetivos Fundamentales NB6: 8° básico
• Realizar transformaciones isométricas de figuras geométricas planas. Construcción de teselaciones regulares y semirregulares. • Caracterizar la circunferencia y el círculo como lugares geométricos. Definición del número pi y su relación con el diámetro y la longitud de una circunferencia. • Utiliza conceptos de perímetro de una circunferencia, área de un círculo, superficie de cilindros y conos y volumen de cilindros y conos rectos.	• Analizar y anticipar los efectos en la forma, el perímetro, el área y el volumen de figuras y cuerpos geométricos al introducir variaciones en alguno(s) de sus elementos (lados, ángulos). • Reconocer las dificultades propias de la medición de curvas y utilizar modelos geométricos para el cálculo de medidas.

Contenidos 1° medio	Objetivos Fundamentales
• Identificación del plano cartesiano y su uso para representar puntos y figuras geométricas. • Realiza transformaciones isométricas en el plano cartesiano. • Relación de congruencia de figuras planas con transformaciones isométricas. • Conjeturar acerca de criterios de congruencia en triángulos y utilización de estos criterios en la resolución de problemas y en la demostración de propiedades en polígonos.	• Identificar regularidades en la realización de transformaciones isométricas en el plano cartesiano, formular y verificar conjeturas respecto de los efectos de la aplicación de estas transformaciones sobre figuras geométricas. • Comprender los conceptos y propiedades de la composición de funciones y utilizarlos para resolver problemas relacionados con las transformaciones isométricas. • Conocer y utilizar conceptos y propiedades asociados al estudio de la congruencia de figuras planas, para resolver problemas y demostrar propiedades.

Contenidos 2° Medio	Objetivos Fundamentales
• Comprender conceptos, propiedades y criterios asociados al estudio de semejanza de figuras planas y sus aplicaciones. • Identifica ángulos inscritos y del centro en una circunferencia. • Aplicación del teorema de Thales sobre trazos proporcionales. • Demostración de los teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad de trazos en el triángulo rectángulo, demostración del teorema de Pitágoras.	• Comprender conceptos, propiedades, identificar invariantes y criterios asociados al estudio de la semejanza de figuras planas y sus aplicaciones a los modelos a escala. • Identificar ángulos inscritos y del centro en una circunferencia, y relacionar las medidas de dichos ángulos.
Contenidos 3° medio	Objetivos Fundamentales
• Deducción de distancia entre dos puntos en el plano cartesiano. • Determinación de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Deducción e interpretación de la pendiente y del intercepto de una recta con el eje de las ordenadas. • Análisis gráfico de las soluciones de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. • Descripción de la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar.	• Comprender la geometría cartesiana como un modelo para el tratamiento algebraico de los elementos y relaciones entre figuras geométricas. • Formular conjeturas, verificar para casos particulares y demostrar proposiciones utilizando conceptos, propiedades o relaciones de los diversos temas tratados en el nivel, y utilizar heurísticas para resolver problemas combinando, modificando o generalizando estrategias conocidas, fomentando la actitud reflexiva y crítica en la resolución de problemas.
Contenidos 4° medio	Objetivos Fundamentales
• Deducción de distancia entre dos puntos en sistema de coordenada de tres dimensiones. • Identificación y descripción de puntos, rectas y planos en el espacio, deducción de la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana. • Resolución de problemas sobre áreas y volumen de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación.	• Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio. • Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio.

De lo expuesto anteriormente, destacamos en la siguiente tabla algunas acciones relativas a cada nivel:

Nivel	Acción
NB1	Reconocer, Anticipar, Constatar, Comparar, Comunicar, Interpretar.
NB2	Caracterizar, Comparar, Identificar, Representar, Interpretar, Elaborar.
NB3	Utilizar, Distinguir, Reconocer.
NB4	Comprender.
NB5	Resolver, Analizar, Establecer.
NB6	Analizar, Anticipar, Reconocer, Utilizar.
Primero Medio	Identificar, Verificar, Comprender, Utilizar, Conocer, Resolver.
Segundo Medio	Comprender, Identificar, Relacionar.
Tercero Medio	Comprender, Formular, Verificar, Demostrar, Resolver.
Cuarto Medio	Comprender, Determinar.

Luego de lo señalado en la tabla, podemos evidenciar algunos aspectos de cada nivel, los cuales se destacan en pos de la presente investigación.

NB1 uno de los objetivos es que el alumno identifique elementos de una figura geométrica, para posteriormente en el NB2 caracterizarlos, luego en el NB3 y NB4 reconocer y comprender respectivamente el comportamiento de una figura geométrica al variar las medidas los ángulos internos y las medidas de sus lados. En el NB5 se establecen criterios de clasificación relativos a ciertas figuras geométricas. Analizar y anticipar los efectos de una variación en una figura geométrica es uno de los propósitos del NB6. Ahora bien, en la enseñanza media tenemos la verificación de conjeturas respecto a ciertas transformaciones de figuras geométricas (primero medio), identificar y relacionar propiedades relativas a algunas figuras planas (segundo medio). En Tercero medio se concretan los objetivos de éste trabajo, puesto que se hace énfasis en la formulación de conjeturas, verificación y demostración de diversas proposiciones.

A partir de lo expuesto anteriormente, es que creemos que existe una cierta gradualidad de los procesos de visualización, exploración, formulación de conjeturas y verificación, haciendo notar que en el marco curricular el razonamiento matemático es transversal a la enseñanza. Asimismo, se busca que el lenguaje de la matemática sea una construcción de significados donde el alumno encuentre un sentido a lo que lea más allá que una cuestión de rigor, esto no significa, sin embargo, que el tema del rigor y la precisión propios del lenguaje matemático sea dejado de lado, sino que el punto de inicio de la adquisición de este lenguaje

sea abordado a partir de los elementos y conceptos cercanos a la experiencia del estudiante.

En resumen, la actualización curricular propone el “pensar matemáticamente” buscando llegar a niveles de comprensión y juicio que permitan evocar en ellos una mirada crítica y formal de la matemática. Ahora bien, las preguntas que surgen son ¿Cómo los docentes diseñan actividades que llevan a esta meta? y ¿Cómo son estas actividades?, pero como ésta no es la intencionalidad del trabajo sólo se ha rescatado los componentes teóricos que presenta la actualización curricular.

La segunda fase de análisis son los mapas de progreso, estos “describen la secuencia en que los estudiantes se desarrollan en determinadas áreas o dominios en los distintos sectores curriculares, estableciendo una relación entre currículum y evaluación, orientando lo que es importante evaluar y entregando criterios comunes para observar y describir cualitativamente el aprendizaje logrado” (Ministerio de Educación, 2010, p.3).

Estos mapas detallan el aprendizaje de los doce años de escolaridad clasificando éste en siete niveles, cada nivel está relacionado con lo que se espera que los alumnos logren al finalizar su período escolar, ayudando así a determinar dónde se encuentran en su aprendizaje y hacia dónde deben avanzar, para así guiar las acciones pedagógicas (Ministerio de Educación, 2010). Se debe dejar en claro que en el aula no todos los alumnos se encuentran en un nivel similar, más bien, conviven estudiantes con distintos grados de aprendizaje por lo cual es de suma importancia conocer donde se encuentran para lograr el avance de cada alumno.

El sector de aprendizaje de matemática se ha dividido en cuatro mapas de progreso: Números, Datos y Azar, Álgebra y Geometría. Como hemos dicho anteriormente, en la actualización curricular se introduce el concepto de razonamiento matemático, el cual también es transversal a cada mapa de progreso, en particular analizaremos el mapa de progreso de geometría que es de nuestro interés, pues necesitamos de su estructura para dimensionar nuestra propuesta.

Los aprendizajes descritos en el Mapa de Progreso de Geometría avanzan considerando cuatro dimensiones que se desarrollan de manera interrelacionada:

- Comprensión de la forma: hace relación a la capacidad de identificar formas geométricas y sus transformaciones partiendo de un lenguaje básico de la geometría.

- Medición: tiene relación a la capacidad de comparar, medir y estimar magnitudes de formas de una, dos y tres dimensiones.
- Descripción de posición y movimiento: Se refiere a la capacidad de detallar la ubicación y la variación de posición de figuras y cuerpos geométricos, así como la capacidad de utilizar coordenadas y vectores para representar posición y movimiento.
- Razonamiento matemático: Se refiere a las habilidades relacionadas con la imaginación espacial, la formulación, verificación o refutación de conjeturas en casos particulares y la búsqueda de regularidades en las formas geométricas, así como la capacidad de resolver problemas geométricos, demostrar teoremas y argumentar sobre sus procedimientos y resultados.

(Ministerio de Educación, 2010)

Ahora bien, si nos enfocamos específicamente al razonamiento matemático éste se orienta en incluir el reconocimiento de patrones y regularidades en la forma, el tamaño o el lugar, la formulación y verificación en casos particulares de conjeturas acerca de figuras, cuerpos y sus relaciones, en el plano y en tres dimensiones, la resolución de problemas, la formulación y análisis de estrategias, la deducción geométrica y la verificación de resultados, relaciones y conjeturas. Lo anterior queda reflejado en el siguiente esquema, referente al razonamiento que se esperan que los alumnos logren alcanzar en cada nivel.

Nivel	Indicadores de nivel (referente a razonamiento)
1	Formula y verifica conjeturas relacionadas con formas que se generan a partir de transformaciones y yuxtaposiciones de figuras planas. Además de resolver problemas análogos.
2	Formula conjeturas relativas a medidas de ángulos en polígonos y a cambios en el área de paralelogramos al variar uno o más de sus elementos.
3	Formula conjeturas relativas a cambios en el perímetro de polígonos y al volumen de cuerpos geométricos al variar elementos lineales y resuelve problemas relacionados con estas variaciones. Verifica o refuta proposiciones en casos particulares, relativos a relaciones y suma de medidas de ángulos interiores y exteriores en cuadriláteros y algunas figuras planas.
4	Formula conjeturas relativas a cambios en el perímetro de polígonos y al volumen de cuerpos geométricos al variar elementos lineales y resuelve problemas relacionados con estas variaciones. Verifica mediante un procesador geométrico el teorema de Pitágoras y el teorema recíproco de Pitágoras utilizándolo en el cálculo de longitudes de trazos en figuras.
5	Formula y verifica conjeturas en relación a los efectos de la aplicación de una transformación a una figura en el plano cartesiano. Demuestra teoremas relativos a relaciones entre trazos en triángulos y en la circunferencia y los aplica en la resolución de problemas. Verifica la congruencia entre una figura plana y la resultante de la aplicación en ella de una transformación isométrica. Aplica teoremas relativos a segmentos en triángulos en la resolución de problemas en contextos geométricos.
6	Formula y verifica analíticamente conjeturas en relación a la forma de los cuerpos generados a partir de rotaciones y traslaciones de figuras planas en el espacio.
7	Resuelve problemas geométricos estableciendo relaciones entre conceptos, técnicas y procedimientos de distintas áreas de la matemática. Selecciona entre varios procedimientos para resolver problemas en diferentes contextos geométricos, acorde a las características del problema. Conjetura sobre la base de exploraciones realizadas con herramientas tecnológicas y verifica proposiciones geométricas mediante axiomas y demostraciones directas e indirectas.

(Ministerio de Educación, 2010)

Se deja en claro que en los mapas de progreso la demostración se introduce en los primeros niveles como verificación en casos particulares, luego como justificación de construcciones o de relaciones entre objetos geométricos, para luego avanzar en formalidad de acuerdo con la madurez de los estudiantes. Preguntas del tipo ¿cómo lo hiciste?, ¿se puede hacer de otro modo?, ¿se puede aplicar este procedimiento en otros casos?, ¿qué razones podemos dar para justificar lo hecho o el resultado?, ayudarán al docente a monitorear el aprendizaje de los estudiantes facilitando la metacognición y el progreso de éstos a través del análisis de los procedimientos y resultados obtenidos (Ministerio de Educación, 2010).

Se puede concluir del anterior análisis que el gobierno por medio de los mapas de progreso y la actualización curricular pretende incentivar en los alumnos el razonamiento matemático desde los primeros niveles, donde gradualmente se conceptualizan condiciones para que en niveles superiores los alumnos logren demostrar relaciones o propiedades geométricas, ahora es válido preguntar si realmente se cumplen estos propósitos y cómo se puede medir la

consecución de los mismos dado que la mayoría de las pruebas de medición nacional no presentan instancias para clarificar esta situación, ni tampoco es posible hacer un seguimiento a nivel macro de los alumnos.

4.2 Descripción de textos escolares:

¿En qué unidad se establece el tema de congruencia de figuras planas en los textos de primer año medio?
Editorial: Arrayan
El tema Congruencia de Triángulos se encuentra ubicado en la última unidad llamada “Geometría”, la cual también abarca el tema de transformaciones isométricas.
Editorial: Mc Graw Hill
El tema Congruencia de Triángulos se encuentra ubicado en la última unidad, la cual tiene por nombre “Congruencia de Figuras Planas”.
Editorial: Zig – Zag
Este tema se encuentra ubicado en la antepenúltima unidad, la cual es llamada “Congruencia de figuras planas”.

¿Cómo se introduce el tema de Congruencia de figuras planas en los textos?
Editorial: Arrayan
Al comenzar la unidad se motiva al alumno mediante un problema relativo a la construcción de un mueble, en donde se dice que las piezas deben ser todas “iguales”, es decir, tener la misma forma y tamaño. A este concepto de “igualdad” le llaman congruencia.
Posterior a ello se realiza un repaso de conocimientos previos, mediante actividades en donde los alumnos deben caracterizar diversos tipos de triángulos, calcular medidas de ángulos, relacionar elementos de un triángulo (altura, transversal de gravedad, bisectriz, simetral y mediana), trazar los ejes de simetría a determinadas figuras y trasladar un triángulo mediante un vector dado.
Luego introduce el término de congruencia mediante los conceptos de Isometrías, ya que “al aplicar una transformación isométrica a una determinada figura, la original coincide con la que resulta de la transformación respectiva, y aquellas figuras que pueden hacerse coincidir “exactamente” se denominan figuras congruentes” (Cid y Muñoz, 2008, p. 221).
Editorial: Mc Graw Hill
Al empezar la unidad se motiva al alumno con una breve historia, la cual dice que una persona pide que se diseñe una mesa triangular para la esquina del comedor y para ello sólo entrega como dato la altura de la mesa y la medida del lado que no va pegado a ninguna de las dos paredes. Con esto se incentiva a que los alumnos se cuestionen si los datos entregados son o no suficientes.
Posterior a ello por medio de ejercicios propuestos se realiza un repaso de conocimientos previos, el cual sólo abarca el tema de transformaciones isométricas.
Luego retoma el problema inicial de la unidad; en un principio habla sobre los datos de la mesa, que no son suficientes para construirla ya que existen varios triángulos que se pueden formar con esas medidas, pero luego toma un dato relevante, que es el que soluciona el problema, el cual indica que los lados de la mesa deben estar pegados a las paredes debiendo formarse un ángulo de noventa grados, por lo cual la mesa tiene la forma de un triángulo rectángulo, resolviéndose así el problema, explicando que los datos dados si son suficientes para la construcción de ésta.

Al instante introduce el término de congruencia mediante una breve corrección de lo que significa la palabra “igual”, tomando el siguiente ejemplo, si dos amigos se encuentran y llevan el mismo tipo de zapatillas y además calzan igual, al intercambiarse nadie se daría cuenta. Con este ejemplo se plantea que existe un abuso del lenguaje, pues dos objetos no se pueden decir que son iguales por tener las mismas características, medidas, etc., sino mas bien “igual” se refiere a que al poner un objeto sobre otro, estos calzan perfectamente. “En matemática ocurre algo similar, pues si se dibujan dos hexágonos regulares de lado 10 cm, no pueden ser iguales, ya que están ubicados en lugares distintos; pero si pueden calzar mediante una isometría. Cuando existe una isometría (traslación, rotación o simetría) que transforma una figura en otra, no decimos que son iguales, sino que son congruentes” (Reyes y Valenzuela, 2009, p.216).

Editorial: Zig – Zag

Al comenzar la unidad se motiva a los alumnos a superponer figuras, doblando y cortando de modo de obtener figuras idénticas, explicando que una manera intuitiva de determinar figuras congruentes es ubicando una sobre otra y hacerlas calzar.

Luego, presenta un apartado “Para considerar”, donde propone al alumno ejercicios de transformaciones isométricas, trasladar, rotar, y trazar la simetral de diversos objetos. Al final de los ejercicios propuestos menciona que mediante una transformación isométrica, donde dadas dos figuras, es posible transformar una de ellas en la otra, se dirá que tales figuras son congruentes.

Posterior a ello trabaja con la “congruencia de trazos”, donde se da a conocer las condiciones para que dos trazos sean congruentes, además se propone construir con regla no graduada y compás un trazo congruente a otro. Por último, se denota el símbolo de congruencia.

En seguida se muestra la congruencia de ángulos, en donde se dan a conocer los pasos para poder construir un ángulo congruente a otro con regla no graduada y compás.

¿Cómo se introduce el tema de Congruencia de triángulos en los textos?

Editorial: Arrayan

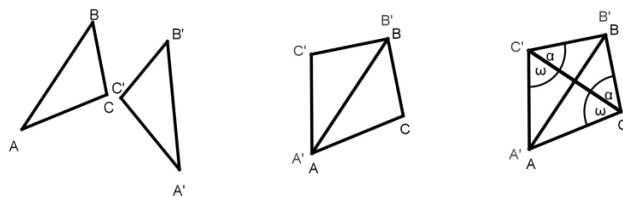
Para comenzar el tema de congruencia de triángulos se plantea un problema que trata de un niño que debe construir un banderín idéntico al original de acuerdo a las siguientes medidas, dos lados miden 25 y 22 cm, el ángulo opuesto al lado de 22 cm mide 60°. Por lo que el niño construye el triángulo pero no queda como el original, entonces es ahí donde se les plantea el problema, ya que deben describir donde se cometió el error. Luego se plantean las siguientes preguntas ¿Era necesario entregar la medida de todos los ángulos y de todos los lados? ¿Qué dato bastaba que diera para que no hubiese un mal entendido?

A partir de esto se presentan los criterios de congruencia de triángulos.

Por otro lado cabe señalar que después del concepto de congruencia, triángulos congruentes y los criterios de congruencia de triángulos, los repasa mediante diversas actividades.

Editorial: Mc Graw Hill

Se introduce el tema de los criterios de congruencia de triángulos, mediante “Triángulos Congruentes”, ya que para que dos triángulos sean congruentes deben tener sus ángulos y lados de igual medida, pero propone quitar alguna de esa información y ver si es que de todas formas se pueden determinar los triángulos congruentes, entonces plantea la siguiente pregunta: “¿Bastarán tres lados iguales y un ángulo igual para que dos triángulos sean congruentes? Investiguemos”. Pero además plantea que aún existe información redundante, entonces si dos triángulos tienen los tres lados de igual medida los triángulos son congruentes, esto lo verifica mediante las siguientes isometrías.



Luego para lo anterior, señala lo siguiente, “Consideremos dos triángulos de iguales medidas, triángulo ABC y el triángulo $A'B'C'$, tales que $AB \cong A'B'$, $AC \cong A'C'$, y $BC \cong B'C'$, basta mostrar que tienen al menos un ángulo de igual medida para demostrar que son congruentes. Mediante una isometría haremos coincidir los vértices A con A' y B con B' , trazando el segmento CC' , formamos dos triángulos isósceles, a saber son, triángulo $CC'A$ y $CC'B$. Por lo tanto los ángulos $CC'A$ mide lo mismo que el ángulo $C'CA$ y por la misma razón los ángulos $C'CB$ y el ángulo $CC'B$ miden lo mismo. Por lo tanto los ángulos ACB y $A'B'C'$ miden lo mismo, por lo tanto el triángulo ABC y el triángulo $A'B'C'$, son congruentes” (Reyes y Valenzuela, 2009, p.223).

Finalmente define cada uno de los criterios de congruencias de triángulos.

Cabe señalar que hace uso de una herramienta didáctica, el software llamado Cabri, para que el alumno construya traslaciones, rotaciones y reflexiones, pero en especial les hace construir un triángulo isósceles, dándoles todas las indicaciones para poder hacerlo, finalmente propone lo siguiente: Explica por qué la construcción que realizaste efectivamente produce un triángulo isósceles. ¿En cuál caso resulta un triángulo equilátero? Dada una circunferencia, la cual tiene marcada una cuerda construye una cuerda del mismo tamaño que la cuerda dada.

Editorial: Zig – Zag

Para introducir el tema de triángulos congruentes, se realiza como primera actividad la presentación de una imagen con distintos tipos de triángulos, con esto el alumno debe agrupar los triángulos congruentes, y responder a la siguiente interrogante: “¿Cómo podrías detectar dos triángulos congruentes, sin necesidad de “superponer uno sobre otro”?”, posterior a ello presenta dos triángulos congruentes trasladados mediante un vector y el alumno debe verificar esa traslación, luego responder una serie de preguntas, para que finalmente se le proponga tener dos triángulos, donde deba verificar que son congruentes pero sin tener que mover uno para ver si coincide, y se le sugiere analizar las medidas. Por último define los Criterios de Congruencia de Triángulos.

¿Utiliza la demostración como medio de aplicación de los criterios de congruencia de triángulos?

Editorial: Arrayan

La demostración se utiliza con el objetivo que el alumno aprenda a manejar los criterios de congruencia de triángulos como una herramienta que le permita demostrar la igualdad entre la medida de dos trazos o de dos ángulos, además de demostrar propiedades geométricas.

Editorial: Mc Graw Hill

Presenta demostraciones mediante “Aplicaciones Geométricas”, por ejemplo, menciona que muchos resultados importantes en geometría se pueden deducir de las propiedades de triángulos congruentes, debido a que siempre se puede triangular una figura poligonal, pues las propiedades de los triángulos pueden deducirse de las características de los triángulos congruentes.

El texto utiliza la demostración para presentar los criterios de congruencia y para luego mostrar algunas propiedades de los triángulos. Se proponen diversos ejercicios de demostración a los alumnos.

Editorial: Zig – Zag

Aplica los criterios de congruencia a diversas demostraciones.

¿Qué características tienen las demostraciones propuestas en los textos?

Editorial: Arrayan

En el primer ejemplo de demostración, plantea el siguiente teorema: *Si un triángulo tiene dos ángulos congruentes, entonces los lados opuestos a esos lados son congruentes.*

- Este teorema a demostrar consta de dos proposiciones, la primera premisa es: *Un triángulo tiene dos ángulos congruentes*, y la segunda es la conclusión: *los lados opuestos a esos ángulos son congruentes*. Los autores afirman “El paso lógico de las premisas a la conclusión es una *deducción*. La conclusión que se obtiene se dice que es una *consecuencia lógica* de las premisas si cada paso que se da para llegar a la conclusión está permitido por una regla. La idea de inferencia se puede expresar de la siguiente manera: *de premisas verdaderas se obtienen sólo conclusiones que son verdaderas*. Es decir, si las premisas son verdaderas, entonces las conclusiones que se *derivan* de ellas lógicamente, *han* de ser verdaderas.”

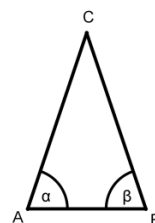
Cabe señalar que para llegar a la veracidad de la hipótesis se modifica la figura trazando la bisectriz del ángulo ACB , donde se conjeturan tres pasos, para lograr utilizar las propiedades de los criterios de congruencia con el fin de llegar a la conclusión.

Teorema:

Si un triángulo tiene dos ángulos congruentes, entonces los lados opuestos a esos ángulos son congruentes.

En el enunciado de un teorema se distinguen dos partes constituyentes: la hipótesis y la tesis.

La hipótesis es lo que aceptamos como cierto, mientras que la tesis es lo que queremos demostrar, en este caso refiriéndose al triángulo dibujado:



Hipótesis: $\alpha = \beta$

Tesis: $BC \cong CA$

Demostración:

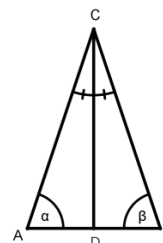
Tracemos CD : bisectriz del ángulo ACB , entonces los triángulos ADC y BDC son congruentes (A.L.A). En efecto:

$\angle ACD \cong \angle BCD$ (CD bisectriz)

$CD \cong CD$ (lado común)

$\angle ADC \cong \angle BDC$ (por ser congruentes los otros dos ángulos) ⁸

De la congruencia de triángulos se deduce que: $AC \cong BC$



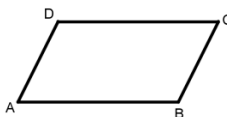
Enseguida plantea otro ejemplo de demostración utilizando la misma idea del ejercicio anterior:

Teorema:

En un paralelogramo, los lados opuestos son congruentes.

Hipótesis: $ABCD$ es un paralelogramo

Tesis: $AB \cong CD$ y $BC \cong AD$



Demostración:

En la figura, se tiene que $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (A.L.A), ya que:

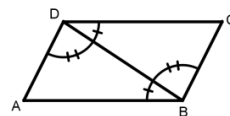
$\angle ADB \cong \angle CBD$ (alternos internos entre paralelas)

⁸ Puesto que $\angle CAD \cong \angle DEC$ y $\angle ACD \cong \angle BCD$, entonces por propiedad “la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo igual a 180° ” se tiene que $\angle ADC \cong \angle BDC$.

$DB \cong DB$ (lado común)

$\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle CDB$ (alternos internos entre paralelas)

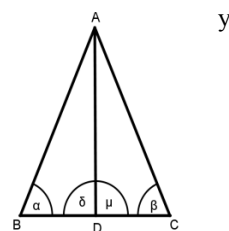
De la congruencia de triángulos se deduce que $AD \cong BC$ y $AB \cong CD$



Editorial: Mc Graw Hill

Describe dos demostraciones mediante el razonamiento deductivo, pero de manera implícita, ya que no define hipótesis ni tesis, sólo va describiendo lo que va haciendo hasta llegar a demostrar una determinada entidad mediante los criterios de congruencia de triángulos. La cual se puede apreciar en el siguiente ejemplo:

“Consideremos un triángulo isósceles ($\triangle ABC$), donde $AC \cong AB$, por lo tanto los ángulos α β miden lo mismo”. Luego traza la bisectriz del ángulo BAC , como AD es bisectriz, se tiene que los ángulos BAD miden lo mismo que el ángulo DAC . Entonces por el criterio LAL, se tiene que los triángulos BDA y CAD son congruentes. Por lo tanto $BD \cong DC$, luego D es punto medio de BC . Es decir, AD es transversal de gravedad. También por congruencia, podemos afirmar que δ y μ miden lo mismo y como son suplementarios, se tiene que miden 90° cada uno de ellos, por lo tanto $AD \perp BC$, es decir, AD es altura del triángulo.



De lo anterior se tiene:

En un triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo opuesto a la base, es transversal de gravedad y altura.

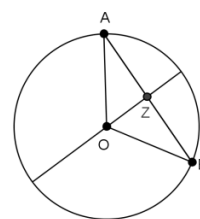
De donde:

Hipótesis: triángulo ABC isósceles.

Tesis: la bisectriz del ángulo opuesto a la base, es transversal de gravedad y altura.

En conclusión tenemos que, la lógica trata de determinar las leyes que dan por hecho que de la veracidad de las premisas (hipótesis), se puede lograr deducir o conjeturar la veracidad de un nuevo juicio, la cual sería la conclusión (tesis).

El segundo enunciado que plantea es el siguiente: “Estudiar algunas propiedades de los trazos de la circunferencia”. Donde se dice: Considerar una cuerda CD en ella. Existe un único diámetro que divide por la mitad a esa cuerda. Llamemos Z la intersección de la cuerda con el diámetro. Marquemos los radios OC y OD . Por el criterio LLL, se tiene que los $\triangle OZC \cong \triangle OZD$, por lo tanto los ángulos OZD y AZC miden lo mismo y como son suplementarios, se tiene que el ángulo $OZD = 90^\circ$, por lo tanto $OZ \perp CD$ entonces, hemos demostrado el siguiente resultado: “El diámetro que dimidia a una cuerda es perpendicular a ella”



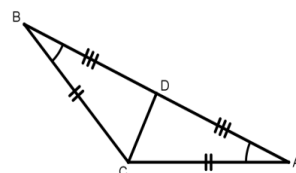
Editorial: Zig – Zag

En una primera instancia demuestra el siguiente teorema: “En cualquier triángulo isósceles, los ángulos basales son congruentes”.

De la siguiente manera: “Si trazamos la transversal de gravedad CD (D punto medio de AB). Obtenemos dos triángulos: $\triangle CDA$ y $\triangle CBD$. Observando estos triángulos, vemos que se dan las siguientes congruencias:

$CA \cong CB$ (Porque el $\triangle ABC$ es isósceles con base AB) (**Este sería el primer paso**). $AD \cong BD$ (D es punto medio de AB , ya que consideremos CD transversal de gravedad) (**Segundo paso**). $CD \cong CD$ (**tercer paso**) por el

criterio LLL, podemos afirmar que hay una correspondencia entre los vértices de los dos triángulos ($C \leftrightarrow C$, $A \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow D$). Luego escribimos $\triangle CAD \cong \triangle CBD$. Este hecho asegura la congruencia entre las tres respectivas parejas de ángulos:



- a) $\angle CAD \cong \angle CBD$
- b) $\angle CDA \cong \angle CDB$
- c) $\angle ACD \cong \angle BCD$

De lo anterior se tiene:

Hipótesis: triángulo ABC isósceles

Tesis: $\angle CAB \cong \angle CBA$

Más adelante explica la diferencia que existe entre verificar y demostrar, debido a que la primera se basa en la experimentación ya sea midiendo o superponiendo, por lo que traerá como consecuencia un hecho no muy confiable puesto que dependerá de la precisión con que se mida o recorte, en cambio la segunda se apoya en argumentos “teóricos”.

Para comenzar la demostración se hace hincapié en la explicitación de la hipótesis y la tesis, dando el siguiente ejemplo:

Demostrar que las diagonales de un rectángulo son congruentes

Hipótesis: $ABCD$ es un rectángulo

AC y BD son diagonales del rectángulo

Tesis: $AC \cong BD$

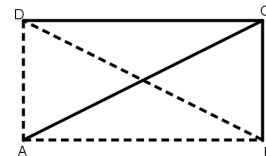
Demostración:

Sabemos que en un rectángulo, los lados opuestos son congruentes. Al trazar las diagonales AC y BD se forman los triángulos ABC y ABD . Basta observar, entonces, que se cumple el criterio (L.A.L) ya que:

$AB \cong AB$ (lado común)

$\angle ABC \cong \angle DAB$ (ángulos rectos)

$BC \cong AD$ (lados opuestos de un rectángulo)



Donde la correspondencia entre vértices es: $A \leftrightarrow B$

$B \leftrightarrow A$

$C \leftrightarrow D$

El criterio (L.A.L) nos asegura que el triángulo ABC congruente al triángulo BAD , de los que se desprende $AC \cong BD$. Con esta demostración, hemos probado que en cualquier rectángulo, sus diagonales son congruentes.

Luego realiza otro ejemplo, siguiendo el mismo patrón que el anterior.

Finalmente plantea ejercicios de demostraciones a los alumnos, tales como los siguientes:

- Demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.
- Demostrar que las alturas de un triángulo equilátero son congruentes.

Posterior a ello plantea demostraciones señalando hipótesis y tesis junto con la figura correspondiente.

En los tres textos escolares descritos se encuentran variadas demostraciones presentadas paso a paso y otras propuestas para que las realice el alumno. Si bien existen situaciones para que el alumno desarrolle la habilidad demostrativa, no se evidencia otro tipo de situaciones en las cuales se presente la necesidad de demostrar, pues cada una de las actividades planteadas muestran un modo repetitivo de desarrollo siguiendo cada uno de los modelos planteados en los ejemplos, es decir, la estructura didáctica del contenido de los textos está principalmente sustentada en los enfoques pedagógicos tradicionales, mantiene una estructura típica en la presentación de los contenidos, no entregando posibilidad al alumno de descubrir o verificar alguna regularidad y/o conjetura, remitiéndose solo a la definición, ejemplo y ejercicio de cada situación, lo cual supone alumnos reproductores de algoritmos y procesos ya entregados, dejando en un segundo plano la necesidad por comprobar alguna afirmación.

Además en uno de estos ejemplos, específicamente en el libro de la Editorial Arrayan en donde se demuestra el teorema “*Si un triángulo tiene dos ángulos congruentes, entonces los lados opuestos a esos lados son congruentes*”, se omite información relevante en la demostración, lo cual repercute directamente en la construcción del saber demostrativo.

Capítulo 5. La Propuesta. Diseño, experimentación y evaluación.

5.1 Planificación

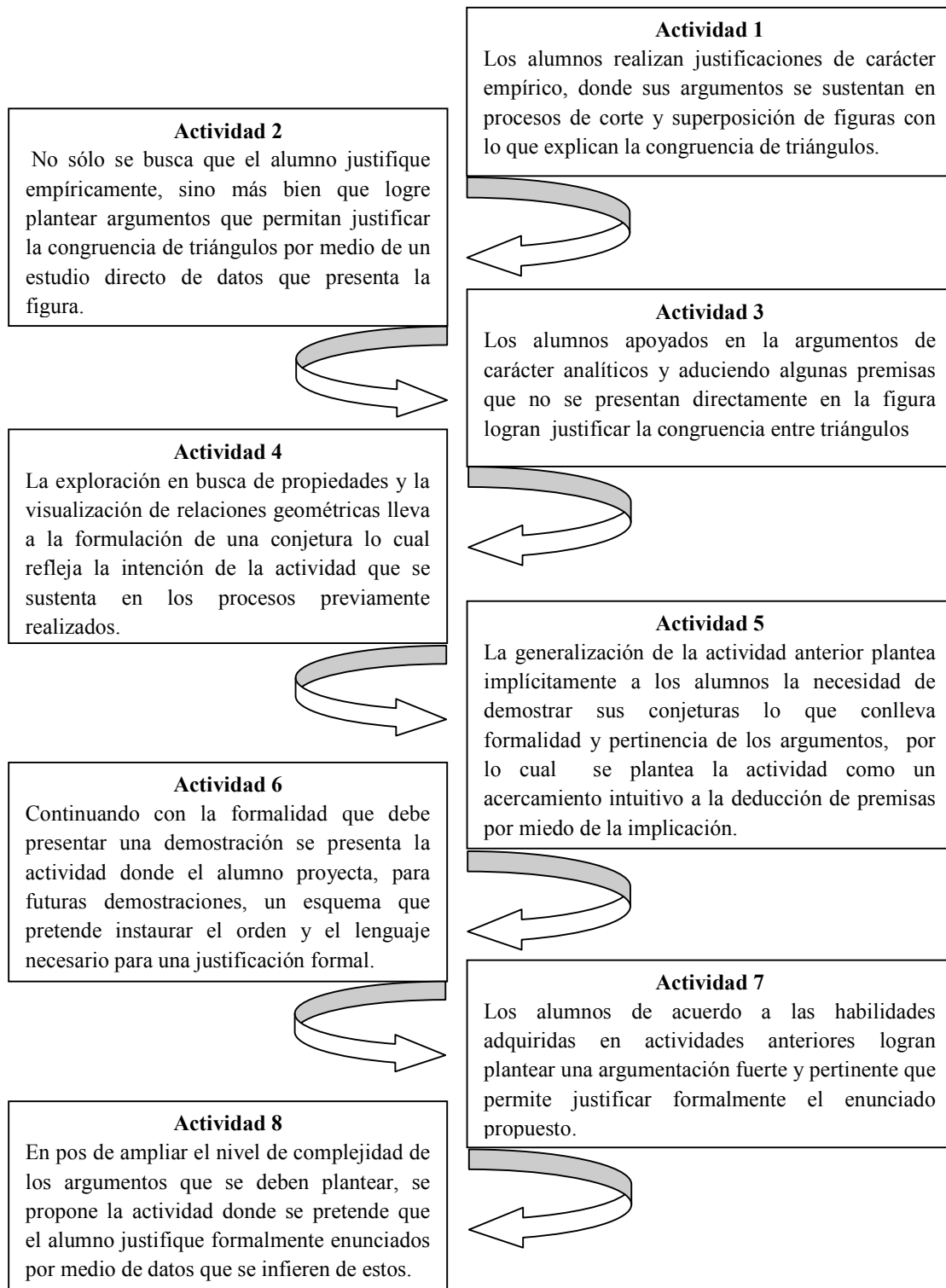
Las actividades diseñadas en la propuesta manifiestan la noción de enseñanza que proponemos para potenciar la habilidad demostrativa, el orden y la secuencialidad de cada actividad se han regido de acuerdo a nuestro marco teórico y las especificaciones que han sido planteadas en la Actualización Curricular.

La planificación y organización de las actividades tiene directa relación con las habilidades que cada una pretende manifestar en los alumnos, a continuación se presenta el siguiente esquema que explicita estas habilidades:

Actividades y la habilidad principal que inquiere

Actividad 1	Explicar proposiciones simples para casos particulares. (Tiempo Estimado: 1 hora cronológica)
Actividad 2	Probar proposiciones directas para casos particulares. (Tiempo Estimado: 1 hora cronológica)
Actividad 3	Inferir datos con el objetivo de probar proposiciones para casos particulares. (Tiempo Estimado: 1 hora cronológica)
Actividad 4	Establecer enunciados expresándolos de modo general. (Tiempo Estimado: 1 hora cronológica)
Actividad 5	Inferir datos mediante la implicación de proposiciones verdaderas. (Tiempo Estimado: 1 hora cronológica)
Actividad 6	Comprender y ordenar la información a favor de lograr una estrategia, de modo de lograr una justificación formal. (Tiempo Estimado: 1 hora cronológica)
Actividad 7	Demostrar proposiciones por medio de datos directos del enunciado. (Tiempo Estimado: 1 hora cronológica)
Actividad 8	Demostrar proposiciones por medio de datos que se infieren del enunciado. (Tiempo Estimado: 1 hora cronológica)

Relación y Secuencialidad entre las Actividades



5.2 Ingeniería de la situación de aprendizaje 1.

Justificación de la primera actividad

La actividad demostrativa, según Perry y otros (2006), no presenta un orden lógico ni secuencial, sin embargo se insinúa una cadena de procesos que parecen naturales, siguiendo este orden proponemos esta actividad, con la intención de que el alumno por medio de la visualización y experimentación logre argumentar empíricamente para justificar la congruencia entre triángulos, tomando este proceso como preliminar dentro de la actividad de la demostración. Cabe destacar al mismo tiempo la secuencia que se observa en el marco curricular y los mapas de progreso, los cuales también plantean como preliminares los procesos de visualización y experimentación para luego avanzar en formalidad de justificaciones dependiendo de la madurez de cada alumno.

El alumno en primera instancia trabaja visualmente, acción necesaria para lograr trazar la diagonal que se considera adecuada para cortar y descomponer la figura en dos triángulos congruentes, es en esta fase donde el alumno estará descubriendo y comprobando una propiedad a partir de la observación y manipulación de las figuras.

Principalmente al desarrollar esta actividad el alumno justifica la congruencia entre triángulos para algunos casos particulares por medio de evidencias basadas en la experimentación, planteando argumentos validados empíricamente, según Duval (1992) para lograr esto, el alumno debe explicar con argumentos fuertes lo realizado, pues debe convencerse a sí mismo, al docente y a sus pares. Según Van Hiele, el estudiante se sitúa en el segundo nivel donde “el razonamiento incluye el descubrimiento de propiedades a partir de la observación y experimentación.” (Gutiérrez y Jaime, 1995, p.28)

La actividad presentada a continuación es propuesta por uno de los textos escolares descritos en la investigación en donde se expresa que “intuitivamente se puede decir que dos figuras planas son congruentes cuando al superponer una sobre la otra, estas “se ajustan perfectamente”. Por ejemplo, en el caso de las hojas de oficio; si tomas dos puedes hacerlas “calzar”. Esto ocurre porque las hojas tienen la misma forma y tamaño” (Vidal y otros (Editorial Zig-Zag), 2005-2006, p.176)

Objetivo de la actividad

Justificar por medio de la visualización y experimentación la descomposición de un cuadrilátero en dos triángulos congruentes.

Metodología de la actividad

El docente en el momento de inicio realizará un recuerdo de los conocimientos previos que son necesarios para la correcta ejecución de la actividad, en este caso la noción de cuadriláteros y sus diagonales, congruencia de figuras planas y criterios de congruencia de triángulos, para luego entregar a cada alumno la Ficha N°1 junto con la Ficha N°1.1. El docente supervisará en el desarrollo de la clase los siguientes aspectos:

- Lograr que comprendan las indicaciones de la actividad, las cuales deben ser dadas de manera clara y sin aportar información que ayude a resolver el problema.
- Desafiar a los estudiantes frente a cada cuadrilátero a comprobar lo pedido para ambas diagonales, por esta razón que la Ficha N°1 entrega dos figuras iguales.
- Promover que los alumnos expliciten sus ideas y procedimientos para resolver cada problema, aun cuando se trate de una idea incompleta, pues la justificación de que existe un hecho de este tipo puede ser una valiosa instancia de aprendizaje.
- Sistematizar los conocimientos surgidos durante la realización de la actividad; para ello se debe promover a través de preguntas del tipo ¿Cómo lograste esto?, ¿Por qué crees que los triángulos son (no son) congruentes? ¿Podemos generalizar el resultado?, entre otras preguntas que puedan surgir durante la clase, de modo que los estudiantes expliquen qué hicieron para solucionar el problema, argumentando las ideas principales surgidas con cada figura.

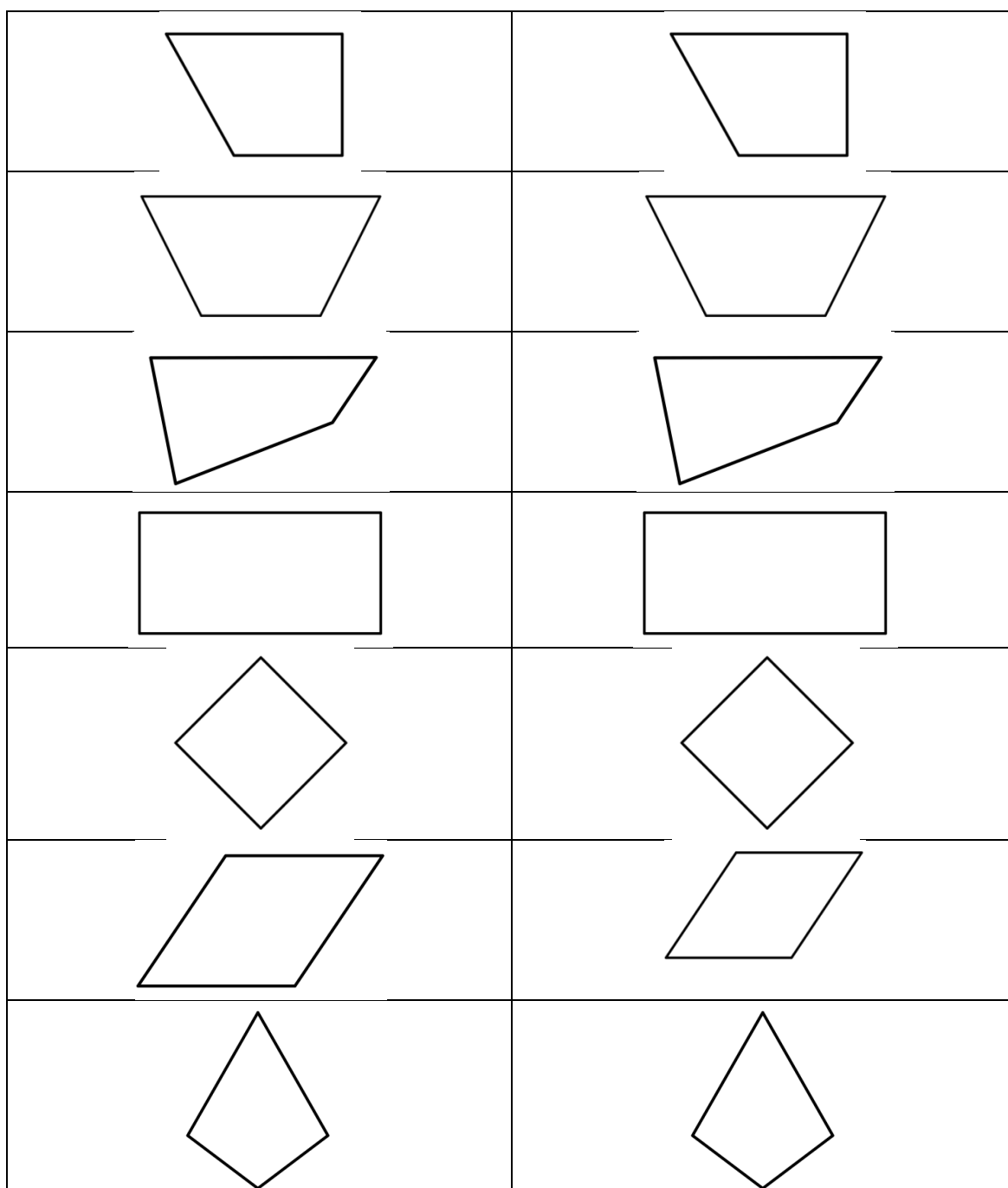
En el momento de cierre de la clase el docente debe formular un diálogo con los alumnos referente a la situación que la actividad propone, señalando que el proceso realizado sólo es una justificación de carácter empírico, basado en la experimentación de una representación

gráfica para mostrar alguna cualidad o propiedad que en ella se ve (explicación), cabe señalar que este proceso no es justificación parcial donde se expliciten razones y afirmaciones (prueba) ni menos una justificación de carácter deductivo (demostración).

Ficha N° 1

Marcar los cuadriláteros que al cortarlos sobre su diagonal se obtienen dos triángulos congruentes.

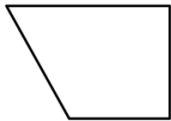
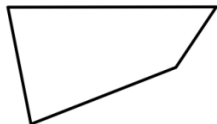
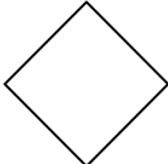
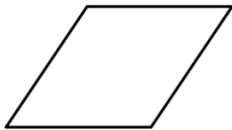
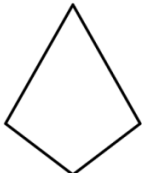
Observación: Se hace entrega de un duplicado de cada cuadrilátero para que puedan hacerse los dos cortes, correspondientes a las dos diagonales a trazar.



Ficha N° 1.1

Marcar los cuadriláteros que al cortarlos sobre su diagonal se obtienen dos triángulos congruentes.

Observación: En esta ficha cada alumno debe esbozar la diagonal trazada, junto con las observaciones realizadas para cada una de éstas.

N°	Figura	Diagonal Trazada	Observaciones
(1)			
(2)			
(3)			
(4)			
(5)			
(6)			
(7)			

Análisis a priori de la actividad N° 1

En cada una de las situaciones planteadas los alumnos pueden abarcar el proceso del punto de vista que ellos estimen conveniente, aun cuando estos no sean los solicitados en la actividad, por ejemplo se puede seguir los siguientes dos procedimientos:

- **Medición de los lados de los triángulos**

El alumno puede realizar el ejercicio trazando la diagonal (una de ellas) para formar dos triángulos al interior del cuadrilátero, al enfrentarse a esta situación mide con su regla las longitudes de cada lado de los triángulos, de este modo llega a ciertos resultados pero en desmedro del objetivo central de la actividad, si bien es cierto que se logra comprobar algunos datos debe enfrentarse a situaciones tales como, ¿qué condiciones se deben cumplir para verificar la congruencia? ó ¿cómo medir los ángulos interiores de los triángulos? (aun no se requiere el uso de los criterios de congruencia), es decir, debe plasmar ciertas conjeturas que si son planteadas correctamente lograría un razonamiento mas allá de lo esperado.

- **Doblaje de la figura**

Un posible camino a seguir es el de doblaje, los alumnos toman las figuras y doblan cada una de estas usando como eje de simetría cada diagonal, este proceso puede parecer viable para el alumno ya que algunas figuras “calzarán perfectamente” formándose triángulos congruentes (o iguales para ellos), ahora bien al resolver de este modo se excluyen casos que el alumno no logra identificar.

Por ejemplo, al doblar el rectángulo sobre una de sus diagonales, los triángulos no calzan (no se forman triángulos congruentes), en esta situación los triángulos que se forman son congruentes pero no se logra visualizar este hecho por medio de esta estrategia utilizada.

Ahora bien, en ambos casos el docente debe orientar al alumno a realizar el proceso pedido para que se puedan cumplir los objetivos de la actividad, a continuación se detalla esta situación:

- **Superposición de los triángulos**

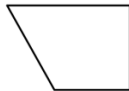
La superposición de figuras está considerada como el método para lograr el objetivo de la actividad, los alumnos trazan una diagonal en cada cuadrilátero propuesto para luego proceder a cortar formándose dos triángulos, a continuación se deben “hacer coincidir” las figuras resultantes para comprobar si estos son o no congruentes.

Se debe hacer notar a los alumnos lo que implica que los triángulos coincidan (congruencia de lados, congruencia de ángulos e igualdad de área) en relación a la congruencia de triángulos.

Observación: se calificarán las posibles respuestas de los alumnos de la siguiente manera

1. Correcta: se representará como respuesta esperada.
2. Incompleta: se representará como respuesta esperada (incompleta). Este tipo de respuesta presenta un desarrollo correcto, sin embargo, puede suceder que no se presentan verificaciones, justificaciones, datos utilizados en los argumentos, entre otros. En este caso el docente debe incentivar al alumno a completar su desarrollo, con el fin de lograr una respuesta correcta.
3. Incorrecto: se calificará como respuesta esperada (incorrecta). En este caso el docente, junto con los alumnos deben, mediante una confrontación de estrategias, llegar a un consenso de modo de lograr una respuesta correcta en conjunto.

Con cada figura los estudiantes pueden proceder del siguiente modo:

Figura 1	
	
Situación 1) 	Respuesta esperada 1 El alumno traza la diagonal que muestra la figura adjunta, luego procede a cortar. Al realizar diversas superposiciones entre los triángulos obtenidos no logra que calcen perfectamente, ante lo cual afirma que los triángulos que se forman no son congruentes
	Respuesta esperada 2 El alumno realiza el mismo procedimiento anterior y explica que los triángulos no pueden ser congruentes, pues al superponerlos no calzan por no poseer la misma superficie, lo cual es una condición necesaria en la congruencia de figuras.

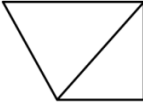
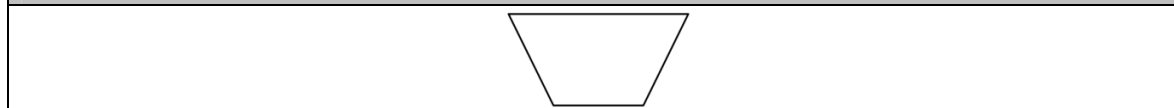
Situación 2) 	Respuesta esperada 1 El alumno corta la diagonal mostrada en la figura expresando que los triángulos no calzan. Justifica su afirmación señalando las figuras no presentan la misma superficie, lo cual es una condición necesaria en la congruencia de figuras.
--	--

Figura 2



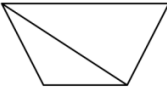
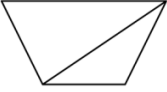
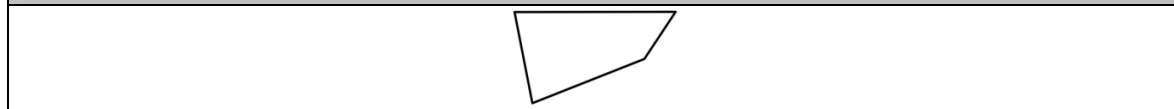
Situación 1) 	Respuesta esperada 1 El alumno traza la diagonal que se muestra en la figura, luego de cortar, procede a superponer los triángulos resultantes, a pesar de realizar diversos movimientos no logra calzar perfectamente ambas figuras por lo cual afirma que los triángulos no son congruentes.
	Respuesta esperada 2 (incompleta) El alumno visualmente identifica que los triángulos tienen solo dos lados congruentes no cumpliéndose así la definición conceptual de congruencia de triángulos.
	Respuesta esperada 3 (incompleta) De manera visual se observa que uno de los triángulos resulta ser más pequeño que el otro, se establece que las figuras poseen áreas distintas por lo tanto no son congruentes.
Situación 2) 	Respuesta esperada 1 Se traza la segunda diagonal, luego de cortar y superponer los triángulos resultantes se evidencia que ambas figuras son de superficies distintas, por lo tanto, no son congruentes.
	Respuesta esperada 2 (incompleta) El alumno visualmente identifica sólo dos lados de igual medida, determina que los triángulos no son congruentes por la definición de dicho concepto.

Figura 3



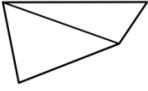
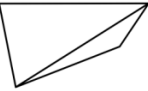
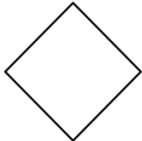
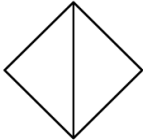
Situación 1) 	Respuesta esperada 1 El alumno traza la diagonal como se presenta en la figura, luego de realizar todos los movimientos posibles argumenta que las figuras al tener distinta forma y tamaño no son congruentes.
	Respuesta esperada 2 (incompleta) El alumno visualmente identifica sólo un lado de igual medida estableciendo que los triángulos no son congruentes por la definición de congruencia.
Situación 2) 	Respuesta esperada 1 Se traza la segunda diagonal, luego de cortar y superponer los triángulos resultantes se evidencia que ambas figuras son de superficies distintas, por lo tanto, no son congruentes.
	Respuesta esperada 2 (incompleta) El alumno al trazar la diagonal visualiza que los triángulos no poseen igual forma ni tamaño por lo cual no son congruentes. En este caso es necesario que el docente insista en que comprueben sus observaciones superponiendo los triángulos, pues se busca que por medio de la experimentación justifiquen el resultado de su trabajo.

Figura 4	
	
Situación 1) 	Respuesta esperada 1 El alumno traza y corta la diagonal, luego superpone los triángulos resultantes logrando un calce perfecto entre ellos, justificando por medio de la superposición la congruencia de las figuras.
	Respuesta esperada 2 Realizando el mismo procedimiento anterior el alumno justifica la congruencia entre los triángulos agregando además que estos poseen igual superficie.
	Respuesta esperada 3 (incompleta) El alumno visualmente identifica que los triángulos resultantes poseen sus tres lados homólogos de igual medida, determinando por simple inspección que los triángulos son congruentes. El docente debe insistir en que comprueben sus observaciones superponiendo, buscando explicar por medio de un trabajo experimental que los triángulos resultantes son congruentes.
Situación 2) 	Respuesta esperada 1 El alumno traza y corta la diagonal mostrada en la figura, superpone los triángulos resultantes logrando el calce perfecto entre ellos justificando de este modo la congruencia entre ellos.
	Respuesta esperada 2 Realizando el mismo procedimiento anterior el alumno justifica la congruencia entre los triángulos agregando además que estos poseen igual superficie.
	Respuesta esperada 3 (incompleta) El alumno visualmente identifica que los triángulos resultantes poseen sus tres lados homólogos de igual medida estableciendo que los triángulos son congruentes, el docente debe insistir en que comprueben sus observaciones superponiendo, buscando explicar por medio de un trabajo experimental que los triángulos resultantes son congruentes.

Figura 5	
	
Situación 1) 	Respuesta esperada 1 El alumno traza y corta la diagonal, luego superpone los triángulos resultantes logrando un “calce perfecto” entre ellos, justificando de este modo la congruencia de las figuras
	Respuesta esperada 2 Realizando el mismo procedimiento anterior el alumno justifica la congruencia entre los triángulos agregando además que estos poseen igual superficie.
	Respuesta esperada 3 (incompleta) El alumno visualmente identifica que los triángulos resultantes poseen sus tres lados homólogos de igual medida, determinando que éstos son congruentes. El docente debe insistir en que comprueben sus observaciones superponiendo, buscando explicar por medio de un trabajo experimental que los triángulos resultantes son congruentes

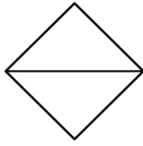
Situación 2) 	Respuesta esperada 1 El alumno traza y corta la diagonal mostrada en la figura, luego superpone los triángulos resultantes logrando un calce perfecto, justificando a partir de esta experimentación la congruencia entre estos triángulos.
	Respuesta esperada 2 Realizando el mismo procedimiento anterior el alumno justifica la congruencia entre los triángulos agregando además que estos poseen igual superficie.
	Respuesta esperada 3 (incompleta) El alumno visualmente identifica que los triángulos resultantes poseen sus tres lados homólogos de igual medida, determinando que los triángulos son congruentes, el docente debe insistir en que comprueben sus observaciones superponiendo, buscando explicar por medio de un trabajo experimental que los triángulos resultantes son congruentes.

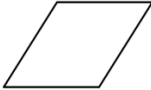
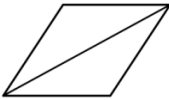
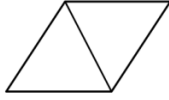
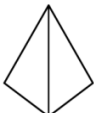
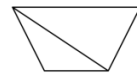
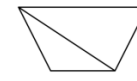
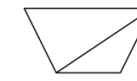
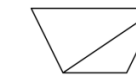
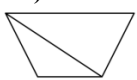
Figura 6	
	
Situación 1) 	Respuesta esperada 1 El alumno traza la diagonal mostrada en la figura, cortan el cuadrilátero descomponiéndolo en dos triángulos, éstos son superpuestos hasta que el calce entre ellos sea exacto, justificando la congruencia de los triángulos por medio de la superposición.
	Respuesta esperada 2 (incompleta) El alumno visualmente identifica que los triángulos resultantes poseen tres lados de igual medida, determinando que los triángulos son congruentes, el docente debe insistir en que comprueben sus observaciones superponiendo, buscando explicar por medio de un trabajo experimental que los triángulos resultantes son congruentes.
Situación 2) 	Respuesta esperada 1 El alumno al trazar la diagonal mostrada en la figura, corta el cuadrilátero descomponiéndolo en dos triángulos, estos son superpuestos hasta que el calce entre ellos sea exacto, justificando la congruencia de los triángulos por medio de la superposición.
	Respuesta esperada 2 (incompleta) El alumno visualmente identifica que los triángulos resultantes poseen sus tres lados homólogos de igual medida, determinando que los triángulos son congruentes, el docente debe insistir en que comprueben sus observaciones superponiendo, buscando explicar por medio de un trabajo experimental que los triángulos resultantes son congruentes.

Figura 7	
	
Situación 1) 	Respuesta esperada 1 El alumno traza la diagonal que se muestra en la figura, luego de cortar superpone los triángulos hasta obtener un calce perfecto, cada lado y ángulo homólogo coinciden, logrando de este modo explicar que el cuadrilátero se puede descomponer en dos triángulos congruentes.
	Respuesta esperada 2 (incompleta) El alumno visualmente identifica que los triángulos resultantes poseen sus tres lados homólogos de igual medida, determinando que los triángulos son congruentes, el docente debe insistir en que comprueben sus observaciones superponiendo, buscando explicar por medio de un trabajo experimental que los triángulos resultantes son congruentes.
Situación 2) 	Respuesta esperada 1 Se traza y corta la segunda diagonal, los triángulos resultantes se superponen. Ambas figuras son claramente de superficies distintas, por lo tanto, no son congruentes.
	Respuesta esperada 2 (incompleta) El alumno supone, debido a sus observaciones, que al trazar la otra diagonal del cuadrilátero también se descompondrá en triángulos congruentes, ahora bien se debe incitar al alumno a realizar el proceso en el cual se observa que los triángulos al ser superpuestos no coinciden de ningún modo por lo cual estos no son congruentes.

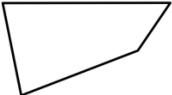
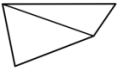
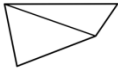
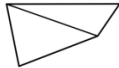
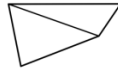
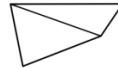
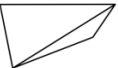
Análisis a posteriori y evaluación de la actividad N° 1

Figura 1				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone los triángulos resultantes, luego afirma que éstos no son congruentes, justificando este hecho por la no coincidencia al superponer.	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, enseguida señala <i>“las figuras no son congruentes, ya que no ocupan la misma área, además tienen un lado igual que es la diagonal que los une pero eso no es suficiente”</i> .	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, luego de superponer indica que ambos triángulos no son congruentes porque: • <i>“Un triángulo tiene notoriamente mayor área que el otro”</i> • <i>“Tienen un lado igual pero no dos ángulos iguales”</i> • <i>“Los triángulos tienen sus lados muy distintos”</i>	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, luego superpone los triángulos obtenidos y señala que no son congruentes, esta conclusión la justifica por la disimilitud entre las áreas. Además hace alusión a que <i>“tampoco cumple con las otras reglas”</i> , sin ahondar más en esa idea.	Situación 1)  El alumno traza una de las diagonales como se observa en la figura adjunta, en primera instancia por un registro visual señala <i>“al trazar la diagonal se obtienen dos triángulos con un lado y un ángulo congruente”</i> , pero luego de experimentar descarta que los triángulos sean congruentes pues <i>“no poseen igual área”</i> .
Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal que se observa en la figura, luego superpone los triángulos resultantes afirmando que éstos no son congruentes al no lograr hacerlos calzar.	Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, luego de superponer señala que los triángulos no son congruentes desarrollando la misma justificación que en la situación 1).	Situación 2) El alumno no traza la segunda diagonal, omitiendo toda respuesta y proceso.	Situación 2)  El alumno traza la diagonal como se muestra en la figura, e inmediatamente concluye que no se obtienen triángulos congruentes apoyados solo en un registro visual.	Situación 2) La segunda diagonal no cree necesario trabajarla, pues supone que ocurrirá el mismo hecho de la situación uno.

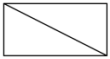
Evaluación El alumno en ambos casos realiza lo pedido (cortar y superponer las figuras) y justifica sus suposiciones por medio de la superposición lo cual era esperado preliminarmente	Evaluación El alumno traza y corta ambas diagonales como se pide. Si bien se esperaba que se hiciera énfasis en la igualdad de superficies, este alumno también hace referencia en la igualdad de las medidas de los lados, lo cual no estaba previsto dentro de los análisis preliminares.	Evaluación El alumno sólo desarrolla el trabajo para una diagonal, en este caso responde de manera esperada, pero justifica de manera implícita mediante los criterios de congruencia, por ejemplo, al señalar que <i>Tienen un lado igual pero no dos ángulos iguales</i> , se puede estar haciendo referencia al criterio de congruencia A.L.A, lo cual en esta actividad no es el objetivo.	Evaluación El alumno realiza lo pedido por el docente y justifica según lo esperado, cabe señalar la alusión implícita que hace a los criterios de congruencia. Además en el segundo caso considera que no es necesario realizar el proceso indicado, ya que se antepone al resultado por medio de la visualización.	Evaluación El alumno en primera instancia argumenta de forma errónea al asumir la congruencia de un par de ángulos sin dar mayor justificación de aquello, finalmente señala una respuesta esperada al indicar que ambos triángulos no son congruentes al no tener igual superficie, luego para la otra diagonal se antepone al resultado por medio de la visualización de ambas figuras formadas.
Análisis a posteriori Para esta figura sólo dos de los alumnos cumplen cabalmente con las instrucciones de la actividad, trazar y cortar ambas diagonales para luego comparar los triángulos resultantes. Sin embargo en los alumnos restantes se destaca que luego de trazar la primera diagonal son capaces de anticipar su respuesta relacionada con la segunda por medio de la visualización. Se hace notar que dos de estos alumnos en sus justificaciones hacen alusión, de forma implícita, a uno de los criterios de congruencia (sin haber sido esto pedido en la actividad).				

Figura 2				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
Situación 1)  El alumno traza dos diagonales como se observa en la figura, luego procede a cortar solo una de ellas, superpone las figuras y afirma que <i>“las dos diagonales no calzan, no fueron congruentes”</i>	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone los triángulos resultantes y señala que <i>“las figuras no son congruentes ya que sólo tienen un lado en común, además no ocupan la misma área”</i>.	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal que se observa en la figura, superpone y explica que ambos triángulos no son congruentes pues: • <i>“Tienen un lado igual pero no hay dos ángulos iguales”</i> • <i>“Uno de los triángulos tiene mayor área que el otro”</i>	Situación 1)  El alumno traza solo una diagonal, corta y superpone un triángulo con otro, a partir de esto explica que ambos tienen un lado y un ángulo congruente, pero eso no implica la congruencia entre las figuras, pues falta que tengan otro ángulo de igual medida para que cumplan con el criterio A.L.A. Por lo tanto establece los triángulos resultantes no son congruentes.	Situación 1)  Traza sólo una diagonal, corta, superpone y explica que <i>“ambos triángulos no pueden ser congruentes pues no poseen ni ángulos ni lados de igual medidas”</i>.
Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone los triángulos obtenidos, afirma sin justificar que <i>“la diagonal trazada no hizo compatible las dos partes de la figura”</i>	Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, luego superpone ambos triángulos y justifica que estos no son congruentes dando los mismos argumentos que en la situación anterior.	Situación 2)  El alumno traza la otra diagonal pero no procede a cortar, mediante la visualización justifica que los triángulos no son congruentes, señalando que: • <i>“Tiene un lado igual, pero no dos ángulos iguales”</i>	Situación 2) De manera visual afirma que los triángulos no serán congruentes porque ocurrirá lo mismo que la situación anterior.	Situación 2) No trabaja esta situación.

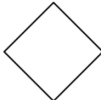
		• “Un triángulo tiene mayor área que el otro”		
Evaluación El alumno realiza el procedimiento indicado por el docente, pero al momento de justificar su respuesta no presenta argumentos coherentes. Cabe señalar que en el segundo caso los argumentos no son entendibles, sin embargo se puede interpretar que no hay figuras congruentes ya que sólo se tiene un lado en común.	Evaluación El alumno realiza el proceso indicado por el docente, identifica la diagonal como un lado común para ambos triángulos (lo cual no estaba dentro de los análisis), luego justifica su respuesta por la no igualdad de superficies, lo cual si estaba esperado para esta situación.	Evaluación En primera instancia el alumno afirma que los triángulos no son congruentes ya que “ <i>Tiene un lado igual, pero no dos ángulos iguales</i> ” donde implícitamente se hace referencia al criterio de congruencia A.L.A para justificar su afirmación, situación que no se esperaba en esta actividad. Luego indica que los triángulos formados en ambas situaciones no son congruentes porque no poseen igual superficie, argumento esperado preliminarmente.	Evaluación El alumno en la situación uno justifica su respuesta basándose en hechos establecidos, vale decir uno de los criterios de congruencia, lo cual se encuentra fuera del objetivo de la actividad. En la otra situación su justificación se sustenta en un registro visual, sin dar mayor explicación de aquello.	Evaluación El alumno realiza el proceso pedido sólo en la situación uno, refiriéndose a la desigualdad de lados y ángulos, para justificar que ambos triángulos no son congruentes, hecho esperado dentro del análisis. El docente hace notar al alumno que debía trabajar la segunda situación.
Análisis a posteriori En la figura dada sólo dos de los alumnos cumplen con las instrucciones de la actividad, trazar y cortar ambas diagonales para luego comparar los triángulos resultantes. Sin embargo, en los alumnos restantes se destaca que luego de trazar la primera diagonal son capaces de anticipar su respuesta por medio de la visualización, incluso uno de ellos cree innecesario trabajar el segundo caso. Se hace notar que uno de los alumnos en sus justificaciones hace alusión a uno de los criterios de congruencia (sin haber sido esto pedido en la actividad).				

Figura 3				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal que se observa en la figura, a posterior superpone los triángulos resultantes afirmando que <i>“la diagonal trazada no es congruente”</i>	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone ambos triángulos y señala <i>“los triángulos no son congruentes, ya que solo comparten un lado pero no tienen ángulos iguales”</i> .	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone los triángulos resultantes afirmando que estos no son congruentes, justificando de la siguiente manera <i>“tienen un lado en común y un ángulo muy parecido pero no logra alcanzar los criterios L.A.L o A.L.A”</i>	Situación 1)  El problema es abarcado en un primer momento de una manera intuitiva, pues traza una de las diagonales y concluye que <i>“a simple vista los triángulos son desiguales y no muestran ninguna congruencia”</i> . Como método para comprobar su afirmación, corta por una de las diagonales y superpone las figuras, reafirmando lo que había expresado anteriormente.	Situación 1)  Traza una diagonal, corta y expresa que <i>“los triángulos obtenidos sólo poseen un ángulo igual, por lo tanto no son congruentes”</i> . Además hace alusión a lo siguiente <i>“al trazar una diagonal en una figura como esta era poco probable obtener dos triángulos congruentes, por su forma y medida”</i> .
Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal que muestra la figura, superpone los triángulos resultantes afirmando que <i>“el corte de la figura resultó desproporcionado, no fue congruente el trazado”</i>	Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal que se observa en la figura, superpone y señala que los triángulos formados no son congruentes sin dar mayor explicación a aquello.	Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone los triángulos resultantes, señala que éstos no son congruentes debido a que <i>“uno de los triángulos tiene mayor área que el otro”</i>	Situación 2) En cuanto a la otra diagonal dice que no es necesario trazarla ni cortarla pues <i>“se puede ver a simple vista que no se forman triángulos congruentes”</i>	Situación 2) El alumno no hace referencia alguna a esta situación.

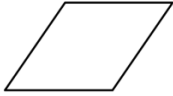
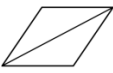
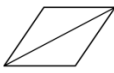
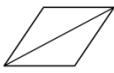
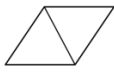
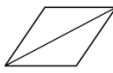
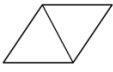
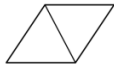
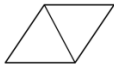
Evaluación: El alumno realiza el proceso pedido, pero no logra justificar su respuesta de manera clara.	Evaluación: El alumno realiza el proceso pedido, justifica su respuesta basándose implícitamente en la definición de congruencia, referente a la congruencia de lados y ángulos, situación esperada preliminarmente.	Evaluación: El alumno en la situación uno realiza el proceso indicado por el docente, argumenta que no es posible aplicar los criterios L.A.L y A.L.A explicando de este modo que los triángulos no son congruentes, situación que no se encontraba contemplada preliminarmente. En la situación dos realiza el proceso indicado por el docente explicando la no congruencia entre los triángulos mediante la comparación de las superficies, lo cual estaba previsto.	Evaluación: El alumno en la situación uno realiza el procedimiento esperado, luego justifica la no congruencia entre los triángulos basándose en una primera instancia en la visualización y luego lo comprueba con la experimentación. En la situación dos de manera visual argumenta que los triángulos no son congruentes, situación esperada preliminarmente.	Evaluación: El alumno realiza el proceso pedido, luego señala que los triángulos no son congruentes, justificándose en la forma irregular de la figura, lo cual no estaba dentro de nuestros análisis. Por esta misma razón, adelantándose a la respuesta, es que no cree necesario trabajar la segunda diagonal. Dejándose entrever que existe una posible conjetura formada por el alumno.
Análisis a posteriori En la figura dada todos los alumnos realizan el proceso pedido, uno de ellos responde de manera esperada, otro alumno no logra justificar su respuesta de manera clara, dos alumnos se basan implícitamente en los criterios de congruencia para la justificación de sus respuestas y uno de ellos basa sus argumentos en la visualización.				

Figura 4				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone los triángulos resultantes y luego afirma que los triángulos son congruentes sin dar mayor justificación de aquello.	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone los triángulos resultantes señalando que, <i>“los triángulos son congruentes, ya que al ponerlo uno sobre otro me doy cuenta de que ocupan la misma área, además poseen todos sus lados congruentes”</i>.	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone los triángulos resultantes afirmando que estos son congruentes justificando de la siguiente forma: • “Cumplen con: L.L.L, A.L.A y L.A.L” • “Sus áreas son iguales”	Situación 1)  El alumno traza la diagonal de la figura adjunta y señala que <i>“los triángulos son congruentes sin necesidad de superponer para comprobar, estos siguen cualquiera de las tres reglas de congruencia”</i>.	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone y afirma que <i>“los triángulos poseen igual área, sus tres lados y sus tres ángulos iguales, por lo tanto los triángulos formados son congruentes”</i>.
Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal mostrada en la figura adjunta, superpone los triángulos obtenidos afirmando que los triángulos son congruentes sin mayor justificación.	Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone los triángulos y expresa <i>“con la otra diagonal también se forman triángulos congruentes”</i>.	Situación 2)  El alumno traza la diagonal, pero no procede a cortar. Visualmente considera que los triángulos son congruentes. La forma de comprobar esta situación la realiza tomando los triángulos que cortó en la situación 1) y al colocar estos sobre la figura 2) se da cuenta que coinciden exactamente.	Situación 2) El alumno sólo señala que al trazar la otra diagonal, también se obtienen triángulos congruentes. Sin mayor explicación.	Situación 2) El alumno no aborda esta situación, pues establece que sucede lo mismo que en el caso anterior.

Evaluación: El alumno en ambas situaciones realiza el procedimiento esperado dentro del análisis, sin embargo omite toda justificación de sus afirmaciones.	Evaluación: El alumno realiza el procedimiento indicado, luego su respuesta es la esperada para ambos casos.	Evaluación: El alumno en la primera situación realiza el proceso pedido, la primera justificación es la esperada pero la segunda referente a la utilización de los criterios de congruencia no era considerada preliminarmente, en la situación dos se destaca la originalidad del método utilizado para justificar la congruencia entre los triángulos, aunque no era esperado.	Evaluación: El alumno en ambas situaciones visualiza que en los triángulos se cumplen los tres criterios de congruencia y no es necesaria la superposición, sin embargo esta afirmación no es sustentada por ningún argumento que lo reafirme.	Evaluación: El alumno en la situación uno realiza el procedimiento indicado y justifica su respuesta mediante argumentos esperados. En la situación dos infiere visualmente la congruencia entre los triángulos lo cual estaba contemplado preliminarmente.
Análisis a posteriori En la figura dada no todos los alumnos realizan el proceso pedido, pues dos de ellos no cortan la segunda diagonal; uno procede a utilizar los triángulos de la primera fase (de modo de verificar que los triángulos en ambas situaciones coinciden) y otro alumno responde la segunda situación utilizando la visualización como medio de justificación.				

Figura 5				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone los triángulos resultantes afirmando sin mayor explicación que <i>“la diagonal trazada es congruente”</i>	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, justificando la congruencia de los triángulos mediante la superposición de las figuras, señala que se puede apreciar que los lados homólogos de ambos triángulos son congruentes.	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal que se muestra en la figura. Superpone los triángulos resultantes, justificando la congruencia : • <i>“Sus áreas son iguales”</i> • <i>“Cumplen con los criterios L.L.L, A.L.A y L.A.L”</i> A modo de conclusión el alumno plantea: <i>“al ser cuadriláteros con lados congruentes, siempre saldrán triángulos congruentes”</i>	Situación 1)  El alumno explica que ambos triángulos son congruentes, pues al superponerlos ocupan igual área, además establece que cumplen con el criterio de congruencia L.L.L, pues al ser la figura un cuadrilátero regular ya se tienen dos lados congruentes, el tercer lado corresponde a ser la diagonal que es un lado en común para cada triángulo.	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal que se muestra en la figura adjunta, superpone y concluye que <i>“los triángulos poseen sus tres lados y sus tres ángulos iguales”</i> , por lo tanto los triángulos formados son congruentes.
Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone los dos triángulos obtenidos realizando la siguiente afirmación <i>“la figura es igual con el otro lado cortado”</i> sin dar mayor explicación.	Situación 2)  El alumno traza la diagonal mostrada en la figura y señala <i>“con la otra diagonal también se forman triángulos congruentes”</i> , sin dar mayor explicación de ésta afirmación.	Situación 2) El alumno al percatarse que la figura es un cuadrilátero que tiene sus lados congruentes afirma que la figura es congruente al tener todos sus lados iguales.	Situación 2) El alumno establece que no es necesario trabajar con la otra diagonal, pues <i>“al tratarse de una figura de lados iguales ocurrirá lo mismo”</i> .	Situación 2) El alumno para esta situación señala que ocurre lo mismo que en caso anterior.

Evaluación: El alumno en ambas situaciones realiza el proceso indicado, sin embargo sus argumentos no son claros ni coherentes y no aportan a la justificación del problema.	Evaluación: El alumno realiza el procedimiento indicado en las instrucciones, luego su respuesta es esperada.	Evaluación: El alumno realiza el procedimiento indicado, su respuesta es la esperada a excepción de agregar que la congruencia encontrada se debe además por los criterios de congruencia. Luego realiza una importante conjetura, lo cual deja entrever que el alumno trabaja la actividad utilizando ya un razonamiento deductivo.	Evaluación: El alumno realiza el proceso indicado, luego su respuesta es la esperada, pero cabe señalar dos justificaciones que añade a su respuesta, los criterios de congruencia y la condición de un cuadrilátero con todos sus lados de igual medida, lo cual no estaba contemplado en los análisis.	Evaluación: El alumno en la situación uno realiza el proceso esperado y su respuesta se encuentra dentro de los análisis preliminares. En cuanto a la situación dos el alumno de forma visual establece que los triángulos resultantes serán congruentes, sin necesidad de superponer, basándose en la justificación de la primera situación.
Análisis a posteriori En la figura dada uno de los alumnos traza y corta ambas diagonales pero sus argumentos a la respuesta no son coherentes ni claros para el lector, los cuatro alumnos restantes no realizan el procedimiento señalado (trazar y cortar) para la segunda diagonal se adelantan a la respuesta por medio de un registro visual, dos alumnos añaden a sus respuestas los criterios de congruencia de triángulos.				

Figura 6				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, y sólo se remite a afirmar “<i>el corte es igual con su otro lado, son congruentes</i>”, sin dar mayor explicación ni justificación a este hecho.	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal que se muestra en la figura adjunta, superponiendo logra plantear que “<i>los triángulos son congruentes, ya que tienen todos sus lados congruentes L.L.L, también L.A.L y A.L.A</i>”.	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal como se muestra en la figura adjunta, superpone los triángulos obtenidos, afirmando que son congruentes ya que: • “<i>Tienen la misma área</i>” • “<i>Cumple con todos los criterios de congruencia</i>”	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone y afirma que “<i>al cortar por cualquiera de las dos diagonales los triángulos serán congruentes</i>”	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, luego señala que los triángulos formados son congruentes justificando mediante la superposición de la figura indicando que “<i>claramente todos sus ángulos y lados son iguales</i>”.
Situación 2)  El alumno en este caso traza y corta la diagonal de la figura adjunta, luego se remite a comentar lo dicho en el caso anterior.	Situación 2)  El alumno traza la diagonal como se muestra en la figura adjunta, señala que “<i>al cortar la otra diagonal también se forman triángulos congruentes</i>”, sin dar argumentos que justifiquen esta situación.	Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal como se muestra en la figura adjunta, superpone ambos triángulos afirmando que estos son congruentes, ya que: • “<i>Cumple con todos los criterios de congruencia y tiene igual área</i>” • “<i>Al ser un cuadrilátero de lados congruentes, siempre se obtendrán triángulos congruentes</i>”	Situación 2) El alumno explicó esta situación en el caso anterior.	Situación 2) El alumno explica que sucede lo mismo que en el caso anterior.

Evaluación: El alumno realiza el procedimiento esperado, sin embargo la respuesta dada es compleja de interpretar.	Evaluación: El alumno realiza el proceso indicado, luego su respuesta no es del todo esperada, pues justifica que los triángulos de la primera situación son congruentes al cumplir con los tres criterios de congruencia, la segunda situación se refiere a un desarrollo esperado dentro del análisis a priori.	Evaluación: El alumno en la primera situación realiza el proceso pedido, la primera justificación es la esperada pero la segunda referente a la utilización de los criterios de congruencia no era considerada preliminarmente, En la segunda situación justifica análogamente a la situación anterior, además plantea una conjetura a partir de su resultado, lo cual no es esperado dentro del análisis preliminar.	Evaluación: El alumno realiza el procedimiento pedido, llegando a una respuesta esperada, a pesar que no argumenta el resultado obtenido.	Evaluación: El alumno realiza el procedimiento y respuesta esperada.
Análisis a posteriori En la figura dada todos los alumnos realizan el procedimiento esperado (trazar y cortar). Se destaca la justificación por medio de los criterios de congruencia de los de los alumnos.				

Figura 7				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone, en base a esto realiza las siguientes afirmaciones: • “El corte en la figura no fue igual al otro” • “No fue igual la figura al trazarla y cortarla” • “No es congruente”	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal que se observa en la figura adjunta, superpone y señala que “los triángulos son congruentes, ya que además de tener igual la diagonal recortada, tienen igualdad de los otros dos lados”	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal que se muestra en la figura adjunta, superpone ambos triángulos obtenidos, y justifica que son congruentes expresando que: • “Tienen igual área y cumplen con todos los criterios de congruencia” • “La figura tiene simetría axial, por lo cual al trazar una recta los triángulos son congruentes”	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal como muestra la figura adjunta, superpone y señala que los triángulos son congruentes.	Situación 1)  El alumno traza y corta la diagonal mostrada en la figura adjunta, superpone y llega a la conclusión que “poseen misma área, lados y ángulos”, por lo tanto ambos triángulos son congruentes.
Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal de la figura adjunta, superpone las dos figuras obtenidas afirmando sin ninguna justificación que los triángulos obtenidos son congruentes.	Situación 2)  En este caso el alumno traza la diagonal de la figura adjunta, luego señala “no corté la otra diagonal porque evidentemente no eran congruentes, ya que sólo compartirían un lado”.	Situación 2)  En este caso el alumno traza la diagonal como se muestra en la figura, y sólo mediante la visualización señala que: • “Un triángulo tiene mayor área que el otro” • “Tienen un lado en común, pero todos los otros lados son distintos”	Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal que se muestra en la figura adjunta, superpone y señala que los triángulos no son congruentes comentando lo siguiente “lo que pasa en esta figura no significa que será siempre así”.	Situación 2)  El alumno traza y corta la diagonal que se muestra en la figura adjunta, superpone y señala “los triángulos no son congruentes pues sólo poseen un lado igual y no cumplen con el hecho de tener igual área, lado y ángulos”

Evaluación: Para ambos casos el alumno realiza el proceso esperado, llegando a la respuesta correcta.	Evaluación: El alumno para una de las diagonales realiza el procedimiento pedido y respuesta esperada. Luego en la situación dos de manera visual logra determinar que los triángulos no son congruentes, lo cual sigue siendo esperado dentro del análisis preliminar.	Evaluación: El alumno en ambos casos realiza el procedimiento señalado, luego en la situación uno añade a sus argumentos la existencia de los criterios de congruencia, además la simetría axial que presenta la figura, hechos totalmente destacables en el alumno y que se encuentran fuera de lo esperado, en cuanto al segundo caso su respuesta es la esperada.	Evaluación: El alumno en la situación uno realiza el procedimiento esperado, justificando solo mediante la superposición la congruencia de los triángulos. En cuanto a la segunda situación, al ser consultado por la afirmación hecha hace referencia a una conjetura planteada por el mismo “al cortar por una diagonal en la cual se obtengan dos triángulos congruentes, con la otra diagonal también sucederá lo mismo”. Lo cual en este caso no sucedió. Sirviendo como contra ejemplo para su propia idea.	Evaluación: El alumno para ambos casos realiza el procedimiento y respuesta esperada.
Análisis a posteriori En la figura dada tres alumnos realizan el procedimiento pedido para ambos casos, uno de ellos realiza una justificación poco clara en el sentido que el lenguaje utilizado no es entendible para el lector, otro alumno asume que el resultado de la primera situación es condición para la segunda, lo cual no es verdadero para este caso y por último un alumno en el segundo caso responde de manera visual.				

5.3 Ingeniería de la situación de aprendizaje 2

Justificación de la segunda actividad

En la actividad anterior se buscaba que el alumno mediante la visualización y experimentación (superposición de las figuras) lograra justificar la congruencia de triángulos, pero es sabido que este método no es posible en algunos casos pues no posee un grado de validez teórico sino más bien empírico.

Aunque la secuencialidad de la actividad demostrativa que se refleja en los mapas de progreso y la propuesta ministerial planteada en el Actualización Curricular no especifican de forma explícita un proceso determinado, en esta actividad buscamos alcanzar una secuencia a seguir en base a nuestro Marco Teórico, con el fin de que los alumnos por medio de sus conocimientos previos y análisis del problema logren justificar la congruencia entre triángulos explicitando algunas razones encontradas directamente (notación de rayas que representan la congruencia de lados y ángulos) en las figuras.

Principalmente se busca que los alumnos logren ampliar su campo de justificación a un nivel más cercano a la deducción, para esto consideramos lo planteado por Van Hiele al hacer referencia al segundo nivel “los alumnos identifican propiedades y sus características de una figura de manera independiente” (Ángel Gutiérrez y otro, 1995), es por esto que en esta actividad se plantea al alumno utilizar su conocimiento relacionado a congruencia de triángulos en particular los principios de congruencia, donde identifican aquellas parejas de triángulos que son congruentes utilizando los datos que se entregan por medio de notación de lados y ángulos congruentes.

Los alumnos al finalizar su trabajo individual confrontan sus resultados al grupo, en donde sus argumentos deben ser los sostenedores de sus decisiones, donde el lenguaje utilizado hace relación a la interpretación que el alumno da a cada notación presentada, cabe destacar que según Duval en este tipo de justificación el razonamiento está muy cercano a la argumentación informal que se realiza en la vida cotidiana en la que se establecen asociaciones espontáneamente, para sustentar una tesis o una opinión afirmando que es útil cuando se

comienzan procesos demostrativos, sobre todo si las figuras contribuyen a la identificación de propiedades geométricas relevantes.

Objetivo de la actividad

Identificar y justificar la congruencia entre triángulos a través del uso de principios de congruencias por medio de premisas que se obtienen directamente del problema.

Metodología de la actividad

Se hace entrega de la Ficha N°2 donde el docente propondrá en un primer momento que la actividad se realice de forma individual. Una vez que el alumno desarrolle los ejercicios se efectuará un dialogo a nivel grupal donde el profesor será un mediador en pos de lograr un consenso del grupo de la muestra en relación a los argumentos planteados.

Al supervisar el desarrollo de la actividad el docente procurará:

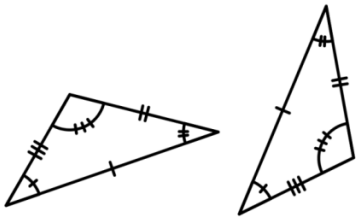
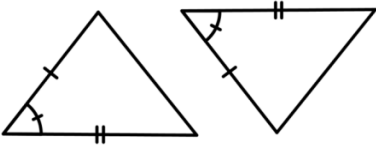
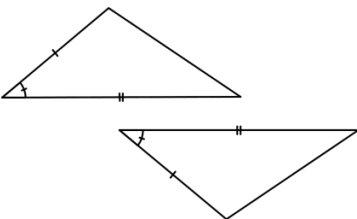
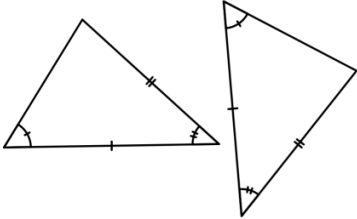
- Lograr que los alumnos reconozcan triángulos congruentes utilizando el saber relacionado (definición de congruencia de triángulos y sus criterios).
- Que los alumnos se den cuenta que además de los recursos antes utilizados (cortar y superponer figuras), es posible utilizar los criterios de congruencia de triángulos para justificar la congruencia entre las figuras presentadas, sin pretender que los alumnos formulen ni lleguen a una demostración formal, ni mucho menos que el maestro la desarrolle.
- Incentivar a los alumnos a justificar las conclusiones obtenidas, buscando que utilicen argumentos pertinentes para llegar a una solución que tenga credibilidad, logrando convencerse a sí mismo y al grupo de la muestra.

En el caso de que uno o varios alumnos realicen un problema de forma incompleta, o de una manera no adecuada, el docente podrá realizar un recordatorio de los criterios de congruencia a utilizar, o aun más, dar contraejemplos en situaciones en que se requieran.

Ficha N°2

Determinar si los pares de triángulos son o no congruentes, justificando cada una de las respuestas dadas.

Indicación: En cada par de triángulos, la notación por medio de rayas indica elementos congruentes (sean lados o ángulos)

Situación 1	
	Respuesta:
Situación 2	
	Respuesta:
Situación 3	
	Respuesta:
Situación 4	
	Respuesta:

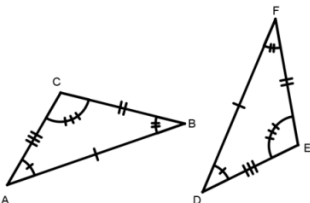
Análisis a priori de la actividad N°2

Cabe señalar que antes de comenzar el análisis de alguna de las posibles soluciones, puede presentarse como una dificultad el no entendimiento de la notación a utilizar, llevando a que los alumnos no sean capaces de distinguir lados ni ángulos congruentes, por esto es necesario que el docente antes del inicio de la actividad se asegure que se comprenda esta notación.

Observación 1: Antes de comenzar hemos rotulado cada uno de los vértices de ambos triángulos, para un mejor desarrollo del análisis. Por otro lado, dentro de las instrucciones para los alumnos no está indicado que esto deba hacerse.

Observación 2: Se calificarán las posibles respuestas de los alumnos de la siguiente manera

1. Correcta: se representará como respuesta esperada.
2. Incompleta: se representará como respuesta esperada (incompleta). Este tipo de respuesta presenta un desarrollo correcto, sin embargo, puede suceder que no se presentan verificaciones, justificaciones, datos utilizados en los argumentos, entre otros. En este caso el docente en la confrontación grupal debe incentivar al alumno a completar su desarrollo, con el fin de lograr una respuesta correcta.
3. Incorrecto: se calificará como respuesta esperada (incorrecta). En este caso el docente, junto con los alumnos deben, mediante una confrontación de estrategias, llegar a un consenso de modo de lograr una respuesta correcta en conjunto.

Situación 1		
		
Respuestas esperada 1 Cómo $AB \cong DF$, $CB \cong EF$ y $AC \cong DE$, por criterio de congruencia de triángulos L.L.L se tiene que ambos triángulos son congruentes.		
Respuestas esperada 2a Cómo $AB \cong DF$, $\angle ABC \cong \angle DFE$ y $CB \cong EF$. Por criterio L.A.L se tiene que ambos triángulos son congruentes.	Respuestas esperada 2b Cómo $BC \cong FE$, $\angle BCA \cong \angle FED$ y $CA \cong ED$. Por criterio L.A.L se tiene que ambos triángulos son congruentes.	Respuestas esperada 2c Cómo $CA \cong ED$, $\angle CAB \cong \angle EDF$ y $AB \cong DF$. Por criterio L.A.L se tiene que ambos triángulos son congruentes.

Respuestas esperada 3a Cómo $\angle CAB \cong \angle EDF$, $AB \cong DF$ y $\angle ABC \cong \angle DFE$. Por criterio de congruencia A.L.A se tiene que ambos triángulos son congruentes.	Respuestas esperada 3b Cómo $\angle ABC \cong \angle DFE$, $BC \cong FE$ y $\angle BCA \cong \angle FED$. Por criterio de congruencia A.L.A se tiene que ambos triángulos son congruentes	Respuestas esperada 3c Cómo $\angle BCA \cong \angle FED$, $CA \cong ED$ y $\angle CAB \cong \angle EDF$. Por criterio de congruencia A.L.A se tiene que ambos triángulos son congruentes.
Respuestas esperada 4 (incompleta) Otra posible respuesta es utilizar la definición natural de congruencia de triángulos expresando que son congruentes al tener los tres lados y ángulos congruentes.		
Respuestas esperada 5 (incorrecta) El alumno emplea el criterio de semejanza A.A.A para justificar la congruencia entre los triángulos.		

Situación 2
Respuestas esperada 1 Como $AC \cong FE$, $AB \cong ED$ y $\angle CAB \cong \angle FED$ se tiene que ambos triángulos son congruentes, por principio de congruencia de triángulos L.A.L.
Respuestas esperada 2 (incorrecta) Cómo $AC \cong EF$ y $AB \cong ED$, el alumno asume que al tener ya dos lados con igual medida, el tercer lado homólogo también será congruente, para luego por criterio de congruencia L.L.L justificar la congruencia entre los triángulos.

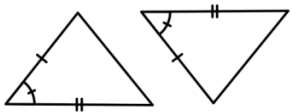
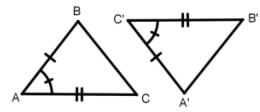
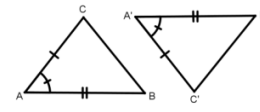
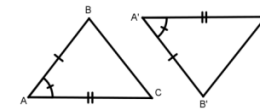
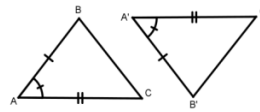
Situación 3
Respuestas esperada 1 Cómo $AC \cong DF$, $AB \cong DE$ y $\angle CAB \cong \angle FDE$, por criterio de congruencia L.A.L se tiene que ambos triángulos son congruentes.
Respuestas esperada 2 (incorrecta) Otra posible respuesta es que los alumnos no dominen el criterio L.A.L y traten de completar la información ajustándola a otro criterio de congruencia de triángulos, pudiendo establecer “si se tienen dos lados congruentes, entonces el tercero también lo será”. Por lo tanto, por criterio L.L.L, los triángulos son congruentes.

Situación 4
Respuestas esperada 1 Cómo $AB \cong DE$, $CB \cong EF$ y $\angle ABC \cong \angle DEF$ por criterio de congruencia L.A.L se tiene que ambos triángulos son congruentes.
Respuestas esperada 2 Cómo $\angle ABC \cong \angle DEF$, $AB \cong DE$ y $\angle CAB \cong \angle FDE$, por criterio de congruencia A.L.A, los triángulos son congruentes.
Respuestas esperada 3 En los triángulos, al tener dos ángulos homólogos congruentes, se puede determinar la congruencia del tercer ángulo (lo cual se puede demostrar mediante el teorema que postula que la suma de la medida de los ángulos interiores de un triángulo es 180°). Por lo tanto, al tener tres ángulos, y dos lados congruentes, se pueden aplicar los criterios L.A.L y A.L.A, para justificar la congruencia de los triángulos.

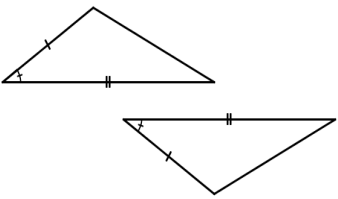
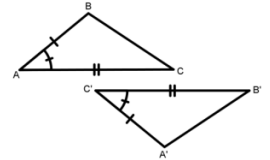
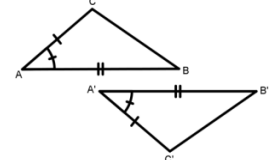
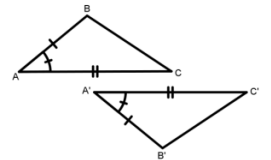
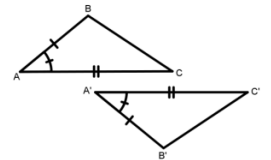
Análisis a posteriori y evaluación de la actividad N° 2

Situación 1				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno rotula cada uno de los vértices de ambos triángulos como se muestra a continuación: Luego señala que ambos triángulos son congruentes por principio de congruencia L.L.L, L.A.L y A.L.A. Para justificar su afirmación explica lo siguiente: • “Todos sus lados son iguales” • “AB es congruente a B'C' ” • “$\angle ABC$ es congruente al $\angle A'B'C'$ ” Además indica que las figuras tienen igual área e igual forma.	El alumno rotula cada uno de los vértices de ambas figuras como sigue: Luego explica que los triángulos son congruentes por los criterios de congruencia L.L.L, L.A.L y A.L.A señalando: • “AB es congruente a A'C'” • “$\angle CAB$ es congruente al $\angle A'C'B'$ ”	El alumno rotula cada uno de los vértices de ambas figuras como se muestra: Luego señala que: “Los triángulos son congruentes, ya que tienen todos sus lados congruentes (criterio de congruencia L.L.L), y sus ángulos también lo son, por lo cual cumplen con los tres criterios de congruencia. Además, el área de ambos triángulos es la misma” Resume parte de la información de la siguiente manera: • “$AB \cong A'B'$ ” • “$\angle CAB \cong \angle C'A'B'$ ”	El alumno comienza nombrando cada uno de los lados, para establecer un orden de trabajo y poder de esta manera identificar de otro modo lados congruentes (la notación por medio de rallas, no es bien conocida por este alumno) Luego, ordena la información determinando por criterio de congruencia L.L.L que ambos triángulos son congruentes. Además da la siguiente información, “de manera visual no se puede determinar que tengan igual área pues están en posiciones distintas”	El alumno en primera instancia rotula los vértices de ambas figuras como sigue: De manera visual establece que los triángulos son congruentes, explicando que se puede justificar por medio del criterio de congruencia L.A.L.

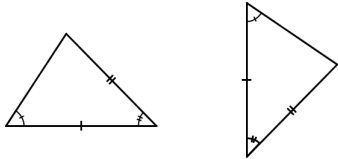
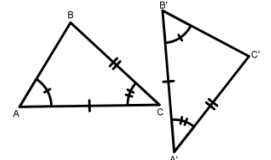
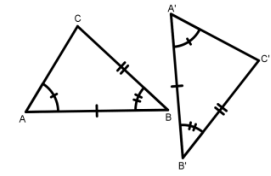
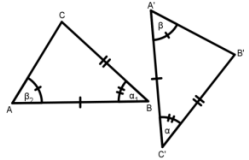
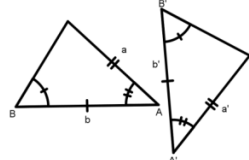
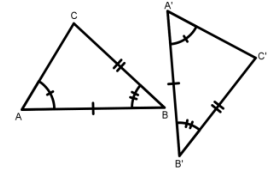
Evaluación La respuesta del alumno es esperada, sin embargo su justificación no es del todo precisa, ya que al emplear los criterios de congruencia A.L.A y L.A.L no explicita los lados y ángulos que son congruentes.	Evaluación La respuesta del alumno es esperada, pero la argumentación presenta dificultades pues al emplear los criterios de congruencia A.L.A y L.A.L no explicita completamente los lados y ángulos que son congruentes.	Evaluación La respuesta del alumno es esperada, el alumno visualiza tres lados homólogos congruentes con lo cual justifica la congruencia, además amplía sus argumentos expresando que los triángulos poseen igual superficie, finalmente intuye que al cumplirse un criterio de congruencia también se cumplirán los otros.	Evaluación La respuesta del alumno es la esperada, pero cabe señalar que la justificación se encuentra incompleta al no indicar la congruencia entre lados y ángulos homólogos. Sin embargo, el alumno añade a su respuesta un comentario destacable en relación a que no es suficiente la visualización para justificar la congruencia entre triángulos, esto nos da una señal de que ya comienza a pensar en hechos establecidos matemáticamente para dar veracidad a un determinado hecho.	Evaluación En primera instancia la respuesta del alumno no es la esperada al señalar que mediante la visualización se puede establecer la congruencia de ambos triángulos sin dar mayor justificación de este hecho, Como otro medio de justificación, el cual era esperable, indica el criterio que a su juicio es indicado para comprobar la congruencia sin embargo no justifica esta elección al no explicitar los lados y ángulos homólogos congruentes.
Gestión de la puesta en común Los alumnos en general argumentaron sus respuestas correctamente, en gran medida utilizando un lenguaje simple amparándose en los principios de congruencia como medio de justificación. Cabe señalar que los alumnos dos y cinco que en su trabajo individual no habían señalado los lados y ángulos homólogos congruentes si lo hacen en esta instancia amparados en las figuras que presenta el problema. En particular el alumno uno al explicar su trabajo, no logra convencer al grupo, el cual confronta su respuesta, la argumentación de este alumno proponía la congruencia de lados no homólogos dejando de lado la notación de “rayas” que presentaba la figura, con la explicación de sus pares comprende su error.				
Análisis a posteriori Tres de los alumnos responden de forma esperada incompleta, pues logran establecer el criterio de congruencia a aplicar pero sin lograr justificar la elección de este. Cabe señalar que dos de los alumnos utilizan la visualización como método de comprobación de sus afirmaciones, uno de ellos dejando claro que si bien la visualización ayuda, no es suficiente.				

Situación 2				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno rotula cada uno de los vértices de ambas figuras como se muestra:  A posterior afirma que los triángulos son congruentes por el criterio de congruencia L.A.L. pues: • “AB es congruente a $A'C'$” • “$\angle BAC$ es congruente a $\angle B'C'A'$”	El alumno rotula cada uno de los vértices de ambas figuras como se muestra:  Luego afirma que los triángulos son congruentes por el criterio de congruencia de triángulos L.A.L. justificando su afirmación de la siguiente forma: • “$AB \cong A'B'$” • “$\angle CAB \cong \angle C'A'B'$” • “$AC \cong A'C'$”	El alumno rotula cada uno de los vértices de ambas figuras como se muestra:  A posterior afirma que los triángulos son congruentes por el criterio de congruencia de triángulos L.A.L. y complementa su argumento con la igual de áreas entre figuras.	El alumno apoyado en la figura establece intuitivamente que por criterio de congruencia L.A.L, ambos triángulos son congruentes.	El alumno rotula cada uno de los vértices de ambas figuras como se muestra:  Establece que los triángulos son congruentes, basándose en el criterio de congruencia de triángulos L.A.L, justificando que “los trazos AB y $A'B'$, AC y $A'C'$ y el ángulo BAC con el ángulo $B'A'C'$ son congruentes”.
Evaluación La respuesta dada es la esperada, sin embargo en la argumentación que el alumno presenta falta señalar un dato para justificar el criterio empleado.	Evaluación La respuesta del alumno es la esperada.	Evaluación El alumno da cómo respuesta la congruencia entre los triángulos utilizando el principio de congruencia L.A.L. lo cual era esperable, más no justifica de modo alguno esta elección, además el alumno argumenta que los triángulos son congruentes al tener superficies iguales sin dar mayor explicación que lo justifique, se interpreta que el	Evaluación El proceso por el cual el alumno llega a la respuesta no está contemplada preliminarmente más el criterio utilizado es el esperado, sin embargo la argumentación que el alumno presenta carece de datos que justifiquen el criterio empleado.	Evaluación La respuesta del alumno es la esperada.

		alumno visualmente discrimina la congruencia entre los triángulos, situación que no estaba contemplada preliminarmente.		
Gestión de la puesta en común Al comenzar el análisis de esta situación el alumno tres voluntariamente expone su trabajo al grupo, los argumentos del alumno se sustentan en la notación de congruencia que presenta la figura señalando los ángulos y lados homólogos congruentes, argumentos que no planteó anteriormente por lo que suponemos se sustentó en el registro visual, el grupo acepta y comprende la justificación llegando a un consenso en cuanto al criterio empleado. Ahora bien, cuando el alumno agrega que los triángulos además son congruentes por la “igualdad de sus áreas”, se pregunta al grupo por la afirmación, el alumno uno hace alusión que él pensó lo mismo argumentando que los triángulos se ven iguales por lo tanto tienen “la misma área”, en ese momento el alumno cinco explica de forma clara y utilizando un lenguaje adecuado, que esa igualdad de área es consecuencia de la congruencia que se encontró, mas no es justificación si se realiza por medio de la visualización, argumentos que son aceptados y entendidos por el grupo.				
Análisis a posteriori Los cinco alumnos logran determinar la respuesta esperada, sin embargo de forma incompleta, pues no logran justificar claramente sus respuestas dadas, de hecho recurren a la visualización como un argumento fuerte para ellos al momento de exponer sus resultados.				

Situación 3				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno rotula cada uno de los vértices de ambas figuras como se muestra:  Posteriormente el alumno señala que el par de triángulos es congruente por criterio de congruencia L.A.L, pues: • “AB es congruente a $A'B'$” • “$\angle BAC$ es congruente a $\angle B'C'A'$”	El alumno rotula cada uno de los vértices de ambas figuras como se muestra:  El alumno señala que el par de triángulos es congruente por criterio de congruencia L.A.L, explicando que: • “AB es congruente a $A'B'$” • “$\angle CAB$ es congruente a $\angle C'A'B'$” • “AC es congruente a $A'C'$”	El alumno rotula cada uno de los vértices de ambas figuras como se muestra:  Señala que el par de triángulos es congruente por criterio de congruencia L.A.L indica además que sus áreas son iguales. Justifica el uso de ese criterio utilizado de la siguiente forma: • “$AC \cong A'C'$” • “$AB \cong A'B'$” • “$\angle CAB \cong \angle C'A'B'$”	El alumno de manera inmediata establece que “los triángulos cumplen con el criterio de congruencia L.A.L”.	El alumno rotula cada uno de los vértices de ambas figuras como se muestra:  Expresa que los triángulos son congruentes pues “cumplen con el criterio L.A.L donde: • “AB es congruente con $A'B'$” • “AC es congruente con $A'C'$” • “El ángulo BAC es congruente con el ángulo $C'A'B'$”
Evaluación	Evaluación	Evaluación	Evaluación	Evaluación
La respuesta del alumno es la esperada, mas en la argumentación que el alumno presenta falta señalar un dato para justificar el criterio	La respuesta del alumno es la esperada.	La respuesta del alumno es la esperada, además se entiende que el alumno deduce de la congruencia entre los triángulos la igualdad de las	La respuesta del alumno es esperada, pero su argumentación del uso del criterio de congruencia es nula, no explicita lados ni	La respuesta del alumno es la esperada.

empleado.		superficies, lo cual no estaba contemplado por ser una consecuencia de la congruencia.	ángulos congruentes, se infiere que la justificación del alumno se apoya en la visualización de la figura.	
Gestión de la puesta en común Los alumnos en general argumentaron sus respuestas correctamente, en gran medida utilizando un lenguaje simple amparándose en los principios de congruencia como procedimiento de justificación. Cabe señalar que el alumno cuatro que en su primer argumento no señaló ni lados ni ángulos congruentes si lo hace en esta instancia amparados en las figuras que presenta el problema, explicando que “<i>la figura mostraba los lados y ángulos congruentes</i>”, es decir el registro visual es el medio de justificación del alumno, el alumno cinco lo confronta diciendo “<i>si colocaste los vértices y los ángulos entonces debes mostrar cuales son los lados y los ángulos congruentes, sino para que los pones</i>”, a partir de esto se establece un intercambio de afirmaciones donde finalmente el docente propone dar la palabra a los otros alumnos donde se acuerda explicitar en lo posible los lados y ángulos homólogos congruentes en pos de lograr argumentos más sustentables y entendibles. Además, nuevamente el alumno uno al explicar su trabajo no logra convencer al grupo cayendo en contradicciones y utilizando un lenguaje poco claro, pero finalmente con la ayuda de sus compañeros estructura un argumento entendible que le permite justificar por el principio L.A.L la congruencia entre los triángulos.				
Análisis a posteriori Las respuestas de los cinco alumnos son esperadas, pero uno de ellos además añade a su argumento la igualdad de las superficies, otro alumno no emplea argumentos válidos en relación a postulados, sino más bien se apoya sólo en la visualización.				

Situación 4				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno rotula cada uno de los vértices de ambas figuras como se muestra:  Posteriormente el alumno señala que los triángulos son congruentes por los criterios de congruencia L.A.L y A.L.A, ya que: • “BC es congruente a A'C'” • “$\angle BAC$ es congruente a $\angle C'B'A'$”	El alumno rotula cada uno de los vértices de ambas figuras como se muestra:  Posteriormente el alumno señala que los triángulos son congruentes por los criterios de congruencia L.A.L y A.L.A, ya que: • “AB es congruente a A'B'” • “BC es congruente a B'C'” • “$\angle ABC$ es congruente a $\angle A'B'C'$”	El alumno rotula los vértices y ángulos de ambas figuras de la siguiente manera:  Posteriormente el alumno señala que: “Los triángulos son congruentes, ya que como se puede observar cumple con dos criterios L.A.L y A.L.A, podemos sacar por deducción que también cumple con el criterio de congruencia de triángulos L.L.L y que tienen la misma área, por lo cual son congruentes”, justificando sus afirmaciones expresando lo siguiente: • “$AC \cong A'C'$” • “$\angle BAC \cong \angle B'A'C'$” • “$\angle BCA \cong \angle B'C'A'$”	Aborda el problema en un primer momento nombrando los lados de la siguiente forma:  A partir de esto establece que los triángulos cumplen con dos criterios de congruencia L.A.L y A.L.A, para esto el alumno explica lo siguiente: • “Existen dos lados iguales” • “Hay dos ángulos iguales” • “Se cumple el orden requerido para utilizar ambos criterios de congruencia”	El alumno rotula cada uno de los vértices de ambas figuras como se muestra:  El alumno identifica lo siguiente: • “$\angle CAB \cong \angle C'A'B'$” • “$\angle ABC \cong \angle A'B'C'$” • “$AB \cong A'B'$” De modo que aplica el criterio de congruencia A.L.A para concluir que los triángulos son congruentes.

Evaluación La respuesta del alumno es la esperada, mas en la argumentación que el alumno presenta, falta señalar datos para justificar los criterios empleados.	Evaluación Los criterios utilizados por el alumno son los esperados, ahora bien, al emplear el criterio L.A.L justifica correctamente su aplicación, más al emplear el otro criterio falta señalar algunos datos para justificarlo. Cabe señalar que esta última afirmación del alumno pudo tomar como argumento la definición de congruencia entre triángulos en relación que si el triángulo ya es congruente cumple con todos los principios de congruencia.	Evaluación Los criterios utilizados por el alumno son los esperados, ahora bien, al emplear el criterio A.L.A justifica correctamente su aplicación pero al justificar la utilización del otro criterio falta señalar algunos datos. El alumno posteriormente deduce que si se cumple con un criterio se cumplirán los otros dos, además si son congruentes tienen igual superficie, siendo esto consecuencia de la congruencia entre los triángulos. Argumentos que no estaban contemplados dentro de los análisis preliminares.	Evaluación La respuesta del alumno es la esperada, sin embargo, si nos enfocamos en la argumentación que el alumno presenta no explicita lados y ángulos para los criterios mencionados.	Evaluación La respuesta del alumno es la esperada.
Gestión de la puesta en común Al tener arraigados algunos conceptos, los alumnos llegan rápidamente a un consenso para la situación, los argumentos utilizados en gran medida tienen lenguaje entendible para todos, amparándose en los principios de congruencias como procedimiento de justificación. Se destacan algunos alumnos que en el trabajo individual no explicitaron los lados y ángulos congruentes si lo hicieron en esta instancia. Se produce una discusión cuando el docente pregunta el porqué justificar por dos principios de congruencia distintos, los alumnos insinúan que lo hacen “<i>para que quede más clara la congruencia o porque ambos criterios se pueden aplicar</i>” sin embargo, no asimilan la implicación que trae la definición de congruencia, donde basta que se cumpla un principio para que se cumplan todos, el docente no propone nuevas preguntas amparado en el descubrimiento de la situación en actividades posteriores.				
Análisis a posteriori Los cinco alumnos responden de manera esperada (incompleta), cabe señalar que en la mayoría de ellos existe una carencia de datos que debieron ser explicitados en sus argumentaciones, uno de los alumnos añade que la congruencia de ambos triángulos implica la igualdad de sus superficies.				

5.4 Ingeniería de la situación de aprendizaje 3

Justificación de la tercera actividad

La Actualización Curricular y el Mapa de Progreso de Geometría hacen énfasis en el razonamiento matemático como transversal a cada unidad, en este aspecto y tomando como esencial la deducción se propone esta actividad principalmente para que el alumno justifique sus respuestas, explicitando algunas razones que no se concluyen directamente del problema. El estudiante se enfrenta a una situación donde los datos que se entregan no son suficientes para justificar la congruencia entre las parejas de triángulos, mas si son necesarios para deducir algunas propiedades relacionados con la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo y el Teorema de Pitágoras para que apoyado en los postulados establecidos pueda justificar la congruencia entre los triángulos.

La confrontación posterior al trabajo individual permite al alumno fortalece su argumentación en la búsqueda de la veracidad de las afirmaciones, dando sentido a las prácticas de explicar y probar; el alumno siente la necesidad de recurrir a alguna justificación general, basándose en propiedades conocidas que conduzcan directamente al resultado (Gutiérrez y otro ,1995).

Objetivo de la Actividad

Inferir información necesaria que permita aplicar los principios de congruencia para justificar la congruencia de triángulos.

Metodología de la actividad

Esta actividad se enmarca dentro de un contexto de análisis de las figuras, los alumnos deben realizar algunos cálculos para determinar las condiciones que logran justificar si las parejas de triángulos presentados son o no congruentes, para esto es necesario que se manejen algunas propiedades y teoremas.

Se hace entrega de la Ficha N°3, la cual debe ser trabajada de forma individual. El docente supervisará los siguientes aspectos durante el desarrollo de la clase:

- Lograr que comprendan las indicaciones de la actividad, las cuales deben ser entregadas de manera clara por el docente y no aportar información que les ayude a resolver el problema.
- Incentivar a los estudiantes a explicar y justificar cada paso de desarrollo durante la actividad.
- Promover la aplicación de propiedades y teoremas conocidos por el alumno, que son necesarios para completar los datos de un determinado problema.

Una vez que los alumnos hayan trabajado la actividad, el docente esbozará cada problema en el pizarrón de modo que sean agentes activos del aprendizaje, pues guían el proceder en cada situación, aportando antecedentes necesarios que permitan poner en evidencia las diferentes formas de abordar y solucionar cada una de las situaciones planteadas.

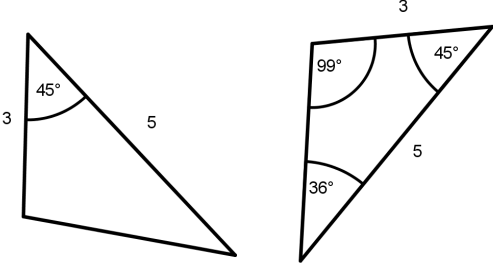
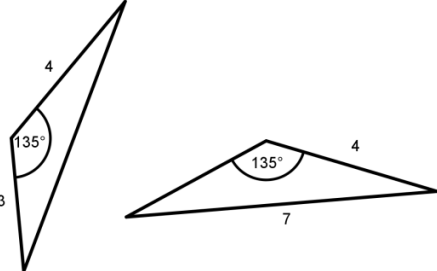
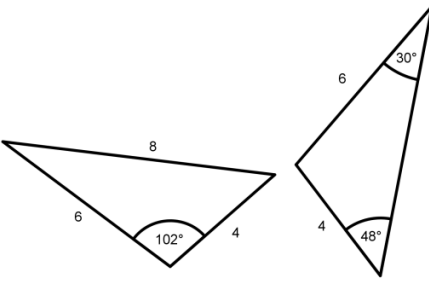
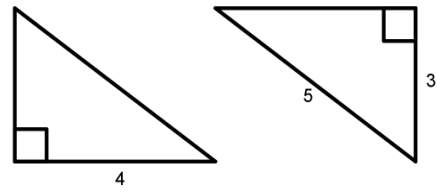
En el caso que se encuentre un error de procedimiento o un desarrollo incompleto, el profesor debe motivar a que sean los mismos alumnos que corrijan o completen el desarrollo. En la situación en que esto no sea posible, el docente realizará una serie de preguntas que ayuden al alumno a lograr lo requerido.

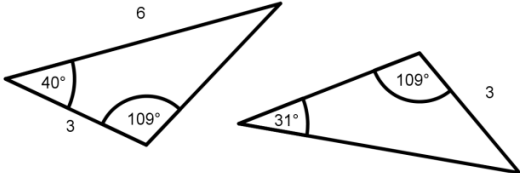
Dependiendo de la situación las preguntas pueden ser:

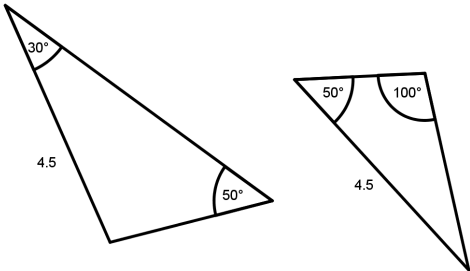
- ¿Qué sucede si buscamos la longitud de este lado?
- ¿Podemos determinar mediante alguna propiedad la medida de este ángulo?
- En el caso del triángulo rectángulo, ¿Le es familiar este tipo de triángulos?, ¿Qué teorema podemos utilizar cuando estamos frente a un triángulo de estas características? ¿Qué datos nos entrega este teorema?

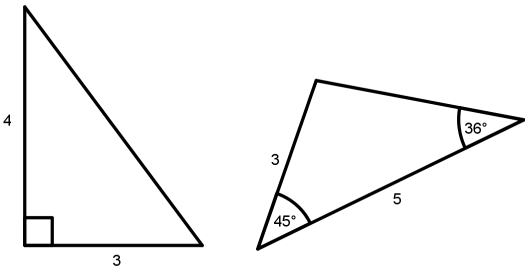
Ficha N° 3

Determinar si los pares de triángulos son o no congruentes, justificando cada una de las respuestas dadas.

Situación 1	
	Respuesta:
Situación 2	
	Respuesta:
Situación 3	
	Respuesta:
Situación 4	
	Respuesta:

Situación 5	
	Respuesta:

Situación 6	
	Respuesta:

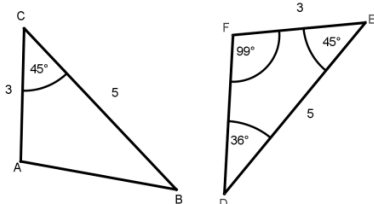
Situación 7	
	Respuesta:

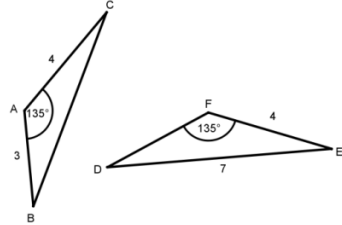
Análisis a Priori de la actividad N°3

Observación 1: Antes de comenzar hemos denotado cada uno de los vértices de ambos triángulos, para un mejor desarrollo del análisis.

Observación 2: Se calificarán las posibles respuestas de los alumnos de la siguiente manera

1. Correcta: se representará como respuesta esperada.
2. Incompleta: se representará como respuesta esperada (incompleta). Este tipo de respuesta presenta un desarrollo correcto, sin embargo, puede suceder que no se presenten verificaciones, justificaciones, datos utilizados en los argumentos, entre otros.
3. Incorrecto: se calificará como respuesta esperada (incorrecta).

Situación 1	
	
Respuesta esperada 1 En este caso el alumno observa las figuras y afirma que ambos triángulos son congruentes. Para justificar lo dicho expresa lo siguiente: Como $AC \cong FE$, $CB \cong ED$ y $\angle ACB \cong \angle FED$ y por criterio de congruencia L.A.L., los triángulos son congruentes.	
Respuesta esperada 2 (Incorrecta) El alumno se fija sólo en el primer triángulo y expresa que estos no pueden ser congruentes, pues no es posible calcular los dos ángulos que faltan. Para corregir este hecho el profesor deberá hacer énfasis en los criterios de congruencia de triángulos.	

Situación 2	
	
Respuesta esperada 1 En cuanto a los criterios de congruencia, no es posible aplicar ninguno de ellos, pues no están los datos suficientes para esto. Por lo mismo, es posible verificar de modo experimental la longitud de cada lado, obteniéndose que BC mide menos que el trazo DE , por lo tanto se tiene que ambos triángulos no son congruentes.	

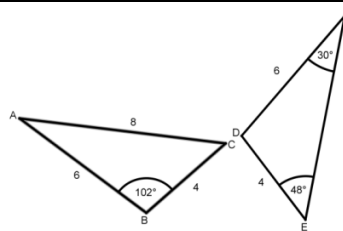
Respuesta esperada 2 (Incorrecta)

El alumno establece que los triángulos no son congruentes, pues no hay un criterio de congruencia que pueda aplicar a esta situación.

Respuesta esperada 3 (Incorrecta)

El alumno utiliza la información de ambos triángulos y completa los datos de la siguiente forma: Como $AC \cong FE$ y $\angle CAB \cong \angle DFE$, entonces los lados AB y DF también son congruentes, por lo tanto por criterio de congruencia L.A.L los triángulos son congruentes.

En este caso el alumno al no poder utilizar uno de los criterios de congruencia, manipula la información entregada de tal forma de aplicar alguno de los principios. Pudiendo suceder que muchas veces los alumnos “piensen” que si se pregunta si dos triángulos son o no congruentes, siempre deberán serlo.

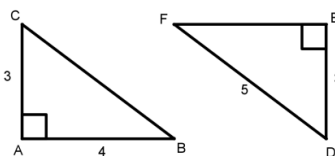
Situación 3**Respuesta esperada 1**

En el segundo triángulo se puede obtener el ángulo faltante utilizando la propiedad “la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180° ”, verificándose que por criterio de congruencia L.A.L, ambos triángulos son congruentes.

Respuesta esperada 2 (Incorrecta)

El alumno al tener que se encuentran que dos lados con iguales medidas, asume que la longitud que falta en el segundo triángulo es de 8u por medio del primer triángulo, y luego justifica la congruencia de ambos triángulos por medio del criterio de congruencia L.L.L.

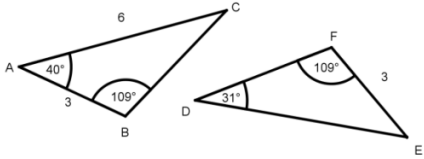
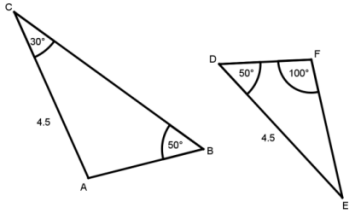
El profesor puede abordar este error dando al alumno un contraejemplo.

Situación 4**Respuesta esperada 1**

El alumno reconoce que ambos triángulos son rectángulos y que las medidas de los lados son conocidas, pues corresponden a ser trios pitagóricos (3u, 4u y 5u). Por lo tanto, la medida de los lados de los triángulos que faltan se puede completar con esta información. Por lo tanto, por criterio de congruencia L.L.L o L.A.L ($AC \cong ED$, $AB \cong FE$ y $\angle CAB \cong \angle FED$) ambos triángulos son congruentes.

Respuesta esperada 2 (Incorrecta)

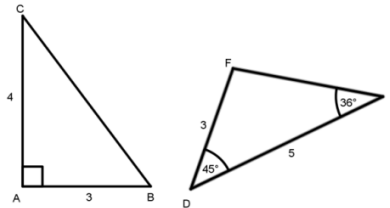
El alumno no es capaz de completar los datos necesarios para determinar si ambos triángulos son o no congruentes. Por tanto asumirá que los triángulos no son congruentes pues no se puede determinar lo contrario. Para procurar que no ocurra una situación similar, el docente debe incentivar a los alumnos a cuestionarse si es posible o no, con lo datos que se tienen, poder determinar los datos faltantes.

Situación 5	
	
Respuesta esperada 1	El alumno determina las medidas de los ángulos faltantes en cada uno de los triángulos obteniendo que $m\angle ACB = 31^\circ$ y que $m\angle FED = 40^\circ$. Por lo tanto, por criterio de congruencia A.L.A ($AB \cong FE$, $\angle BAC \cong \angle FED$ y $\angle ACB \cong \angle FDE$) ambos triángulos son congruentes.
Respuesta esperada 2 (Incorrecta)	El alumno determina (al igual que en el caso anterior) la medida de cada uno de los ángulos faltantes, al ver que los tres pares de ángulos son congruentes, determina visualmente (de forma errónea) que los lados AC y ED son también congruentes. Por lo tanto, ambos triángulos también lo son por el criterio de congruencia L.A.L ($AC \cong ED$, $AB \cong FE$ y $\angle CAB \cong \angle FED$).
Respuesta esperada 3 (Incorrecta)	El alumno dice no poseer los datos suficientes para determinar si los triángulos son o no congruentes. Por tanto, él concluye que los triángulos no son congruentes. Para procurar que no ocurra una situación similar, el docente debe incentivar a los alumnos a cuestionarse si es posible o no, con lo datos que se tienen, poder determinar los datos faltantes.
Situación 6	
	
Respuesta esperada 1	Por propiedad de la medida de los ángulos interiores de un triángulo, es posible completar en ambas figuras la medida del ángulo que falta, obteniéndose que $m\angle CAB = 100^\circ$ y $m\angle DEF = 30^\circ$. Por lo tanto, si bien se tiene que ambos triángulos poseen ángulos congruentes, no es posible utilizar ninguno de los criterios establecidos, ante lo cual verifican de modo experimental la congruencia entre todos los lados, obteniendo que BC mide más que el trazo EF , por lo tanto se tiene que ambos triángulos no son congruentes por la definición de congruencia.
Respuesta esperada 2 (incompleta)	Por propiedad de la medida de los ángulos interiores de un triángulo, es posible completar en ambas figuras la medida del ángulo que falta, obteniéndose que $m\angle CAB = 100^\circ$ y $m\angle DEF = 30^\circ$. Por lo tanto, si bien se tiene que ambos triángulos poseen ángulos congruentes, no es posible utilizar ninguno de los criterios establecidos
Respuesta esperada 3 (incorrecta)	Al igual que en la respuesta anterior, los alumnos completan las medidas de los ángulos faltantes de cada triángulo, determinando que los triángulos poseen dos ángulos y un lado de iguales medidas, por lo tanto por criterio de congruencia A.L.A los triángulos son congruentes. El problema es un error de procedimiento, pues el alumno si bien identifica lados y ángulos congruentes, no verifica que se cumpla el “orden” necesario que establece cada criterio. Para remediar este hecho, el docente debe hacer énfasis en las situaciones en las cuales se puede aplicar cada criterio.

Respuesta esperada 3 (incorrecta)

Los alumnos determinan al igual que en los casos anteriores que ambos triángulos poseen sus tres ángulos homólogos congruentes, determinando que por criterio A.A.A, los triángulos son congruentes.

Se produjo en el alumno una confusión, pues si bien este criterio ayuda a determinar triángulos semejantes, no es así para triángulos congruentes. Se debe hacer énfasis en cuáles son los criterios que en este caso se están utilizando (A.L.A, L.L.L y L.A.L)

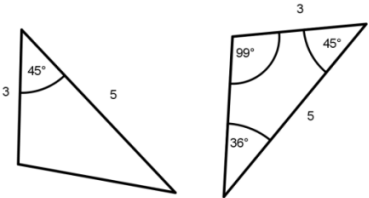
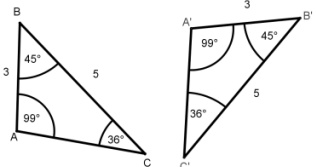
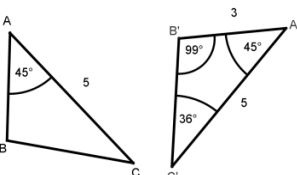
Situación 7**Situación esperada 1**

El alumno se centra en el segundo triángulo calculando que $m\angle DFE = 99^\circ$, de aquí determina que los triángulos no son congruentes, pues el triángulo ABC posee un ángulo recto que el triángulo DEF no posee, es decir, con el solo hecho de tener un ángulo que no es congruente con otro, se puede determinar que los triángulos no son congruentes.

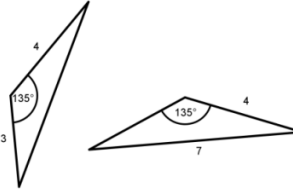
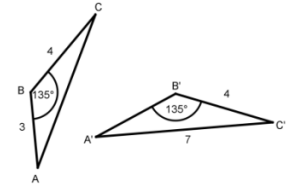
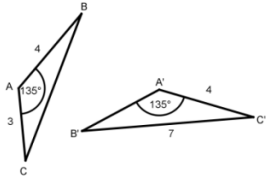
Situación esperada 2 (incorrecta)

El hace uso del teorema de Pitágoras en ambos triángulos determinando la longitud del trazo BC y del trazo EF (en este caso de forma errónea), de donde tiene que $\overline{BC} = 5u$ y $\overline{EF} = 4u$. El alumno expresa que por criterio de congruencia L.L.L los triángulos son congruentes.

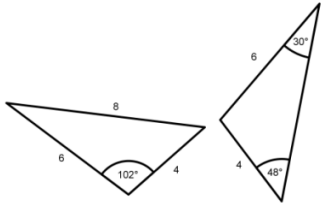
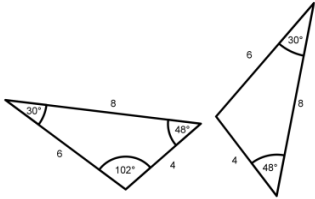
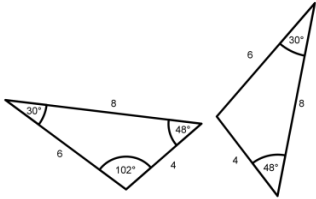
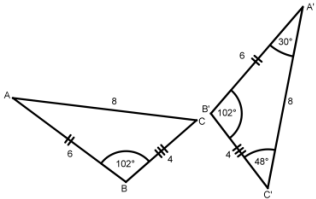
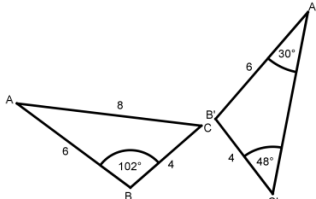
Análisis a posteriori y evaluación de la actividad N° 3

Situación 1				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno señala lo siguiente: <i>“Este par de triángulos son congruentes por criterio de L.A.L, pues sus lados son iguales y el ángulo de 45° es igual al otro”</i>	El alumno rotula los vértices de los triángulos y completa los ángulos del $\triangle ABC$, de la siguiente manera:  Para completar la información utilizó el teorema que hace relación con la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Luego señala que los triángulos son congruentes, dando los siguientes argumentos: <i>“Son triángulos congruentes, pues cumplen con el criterio L.A.L, además si $\overline{B'C'} = \overline{BC}$, el ángulo CBA debe ser congruente al ángulo A'B'C'”</i>	El alumno rotula los vértices de la siguiente manera:  Luego afirma que <i>“los triángulos son congruentes pues:</i> • <i>“$\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$”</i> • <i>“$BA \cong B'A'$”</i> • <i>“$AC \cong A'C'$”</i> <i>esto cumplen con el criterio L.A.L”</i>	El alumno determina de forma inmediata que los triángulos son congruentes pues <i>“se cumple con dos lados iguales y un ángulo igual, cumpliéndose el criterio L.A.L”</i>	De manera visual el alumno establece que ambos triángulos son congruentes pues poseen dos lados y un ángulo congruente. Por lo tanto por criterio de congruencia L.A.L los triángulos son congruentes.

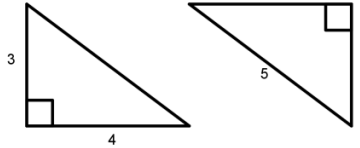
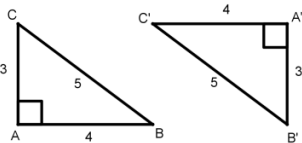
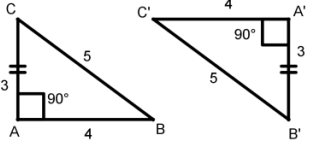
Evaluación El alumno responde respecto al criterio de congruencia de manera esperada pero se considera incompleta, ya que no señala específicamente lados y ángulo congruentes del criterio empleado.	Evaluación El criterio utilizado por el alumno es el esperado, sin embargo el uso del teorema relativo a la medida de los ángulos interiores de un triángulo fue empleado de manera errónea, además deja de manera incompleta la respuesta al no indicar explícitamente los lados y ángulos congruentes del criterio empleado.	Evaluación El alumno responde de manera esperada.	Evaluación El alumno responde de manera no esperada pues falta explicitar los lados y ángulos congruentes para el criterio empleado.	Evaluación El criterio de congruencia empleado es el esperado, pero faltó explicitar lados y ángulo congruente para el criterio utilizado.
Gestión de la puesta en común En esta instancia los alumnos argumentan sus respuestas utilizando un lenguaje apropiado, justificando el criterio utilizado señalan en la figura los lados y ángulos congruentes homólogos. Cabe destacar que algunos alumnos que presentaban dudas en relación a la aplicación del criterio confrontan sus resultados ante sus compañeros los cuales entregan los datos suficientes que permiten armar un argumento fuerte que permita justificar la congruencia.				
Análisis a posteriori Todos los alumnos respondieron de acuerdo al criterio de congruencia esperado, pero tres de ellos responden de manera incompleta, pues carecen de algún dato que no se encuentra explícitamente señalado de acuerdo a los lados y ángulos congruentes del criterio que han empleado, uno de ellos utiliza las medidas de los ángulos interiores de manera errónea de acuerdo al criterio utilizado, y finalmente un alumno responde manera esperada.				

Situación 2				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno indica que: <i>“Este par de triángulos no son congruentes, porque sus lados no son iguales”.</i>	El alumno rotula los vértices de los triángulos de la siguiente manera:  Luego indica que los triángulos no son congruentes, ya que: <i>“No cumple con ningún criterio, porque sólo tiene un ángulo igual y un lado. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, $BC \cong B'C'$ y AB no es congruente a $A'B'$”</i>	El alumno rotula cada uno de los vértices de la siguiente manera:  Luego afirma que los triángulos no son congruentes ya que, <i>“tienen un lado y un ángulo en común, pero por lo visto no tienen algo más en común”</i> a posterior al tratar de verificar su hipótesis explica <i>“si la base de un triángulo es siete, entonces el otro triángulo no debe tener dos lados que sumados den la base porque de esa forma el triángulo no puede ser formado”</i> con lo cual justifica que el lado BC no es igual al lado $B'C'$”	El alumno establece que a simple vista podría establecerse que son triángulos congruentes, y que basándose en la información entregada por cada figura, observa que hay datos coincidentes, es decir <i>“en un triángulo está el valor de un lado (3) y en el mismo lado del otro triángulo ese dato no está, en el segundo triángulo hay un valor (7) y que en el primer triángulo no aparece frente al ángulo de 135°, por lo que podría ser 7, pero este hecho no siempre sucede en todos los triángulos, por lo tanto no son congruentes.”</i>	El alumno establece a simple vista que <i>“los triángulos no son congruentes, pues sólo tienen un lado y un ángulo congruente, lo cual no es información suficiente”.</i>

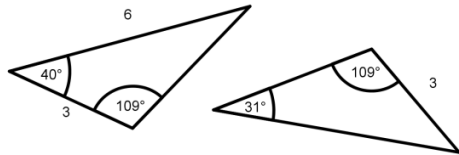
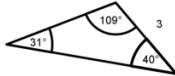
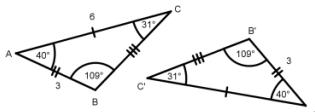
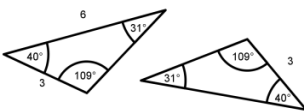
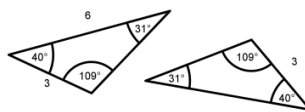
Evaluación El alumno logra la respuesta correcta, sin embargo la justificación empleada es errónea, pues se basa en un hecho que el alumno no puede asegurar.	Evaluación El alumno responde de manera esperada.	Evaluación La respuesta dada por el alumno en una primera instancia es la esperada, pero agrega una propiedad basada en la desigualdad triangular para justificar su respuesta, lo cual se encuentra correcto y fuera del análisis preliminar	Evaluación La respuesta dada por el alumno es la esperada.	Evaluación La respuesta dada por el alumno es la esperada.
Gestión de la puesta en común Durante esta instancia los alumnos señalan los argumentos que justifican que los triángulos no son congruentes, y lo realizan examinando cada uno de los criterios de congruencia de triángulos, hecho importante, ya que el alumno uno, logra entender el hecho de que se debe revisar todos los criterios para finalmente responder que los triángulos no son congruentes, ya que justificarlo sólo con uno no es suficiente, sin embargo el docente al plantear si la los argumentos del alumno son validos el grupo no presenta mayores objeciones, ante lo cual el docente intenta esbozar la repuesta correcta sin embargo desiste en pos de lograr en actividades posteriores la adquisición de la justificación de este tipo de problemas por parte de alumno				
Análisis a posteriori Cuatro alumnos responden de manera esperada, uno de ellos añade a la justificación de su respuesta el hecho de la desigualdad triangular, y por último un alumno responde de manera correcta pero las justificaciones utilizadas son erróneas, pues sus argumentos empleados son basados en hechos que no puede asegurar.				

Situación 3				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno toma los datos del primer triángulo y los anota en el segundo, haciendo lo mismo con el otro. Es decir, plantea lo siguiente:  <i>“Este par de triángulos son congruentes y sus lados también. Si los lados son congruentes sus ángulos también lo serán, sus lados miden 6, 8 y 4 igual que el otro triángulo”</i>	El alumno completa la medida de los ángulos de ambos triángulos y el lado que falta en el triángulo de la derecha, como sigue:  Cabe señalar que en el segundo triángulo se completa la medida del ángulo basándose en un teorema (suma de los ángulos interiores del triángulo). Luego se señala: <i>“los triángulos son congruentes pues cumple con todos los criterios, ya que si se suma 48° y 30° obtenemos 78°, que es lo que le falta a 102° para llegar a 180°”</i>	El alumno rotula cada uno de los vértices de la siguiente manera:  El alumno establece que el criterio L.A.L es el indicado para demostrar la congruencia de ambos triángulos y para utilizarlo solo necesita determinar la medida del ángulo faltante del segundo triángulo y lo determina utilizando el teorema de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo, luego señala que • “$\angle ABC \cong \angle A'B'C'$” • “$AB \cong A'B'$” • “$BC \cong B'C'$” Por lo tanto por criterio de	El alumno trabaja con el segundo triángulo y calcula la medida del ángulo faltante (utilizando el teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo). A partir de esto establece que por criterio de congruencia L.A.L los dos triángulos presentados son congruentes, pues el ángulo calculado al inicio corresponde a ser congruente con el del primer triángulo y además como dato se da que dos lados son congruentes.	el alumno en primera instancia rotula cada uno de los vértices de la siguiente forma  Luego afirma que los triángulos son congruentes por criterio L.L.L, pues “$AB \cong B'A'$” “$BC \cong B'C'$” “$AC \cong A'C'$” Afirmando que esto sucede pues “al reemplazar todas las medidas de los ángulos en uno solo, la suma da 180, o sea los triángulos son congruentes”.

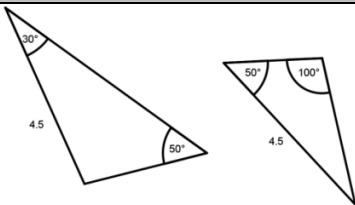
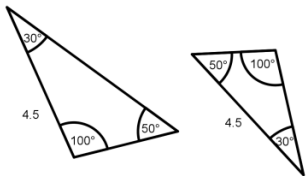
		congruencia L.A.L los triángulos son congruentes.		
Evaluación El alumno responde de forma errónea, ya que los argumentos utilizados para justificar lo señalado no son correctos, pues existe una confusión entre la hipótesis y la tesis del problema.	Evaluación La respuesta dada por el alumno no es la esperada, además argumenta en base de hechos que no pueden utilizarse como justificables para la congruencia de triángulos.	Evaluación La respuesta dada por el alumno es la esperada.	Evaluación El alumno no logra responder de forma esperada los ejercicios, pues no explicita lados congruentes para el criterio empleado.	Evaluación La respuesta dada por el alumno no es la esperada, ya que asume hechos que no corresponden.
Gestión de la puesta en común En este caso la confrontación paso a ser una instancia relevante, ya que la mayoría de los alumnos se encontraba con respuestas no esperadas, por lo cual aclararon dudas y finalmente en conjunto con el docente indicaron la respuesta esperada señalando los argumentos correspondientes para el uso del criterio de congruencia LAL. El docente de manera estratégica le pide al alumno1 que explique sus respuestas, con la finalidad de aclarar al grupo que en el segundo triángulos no se puede asumir la medida del lado faltante ante esta situación surgieron preguntas tales como “¿Si tenemos dos lados congruentes es evidente que el tercer lado también los es?¿Por qué es necesario siempre utilizar un criterio que lo valide, si incluso de manera visual se puede apreciar que los triángulos son congruentes?” el docente dio respuesta a cada una de ellas, haciendo hincapié en la importancia de justificar con argumentos fuertes y pertinentes la congruencia entre los triángulos y no presentando siempre una justificación empírica.				
Análisis a posteriori Uno de los alumnos responde manera esperada, tres alumnos responde de manera no esperada, y finalmente un alumno responde de forma errónea, pues los argumentos que utiliza para la justificación de su respuesta son incorrectos, debido a la confusión entre la hipótesis y la tesis.				

Situación 4				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno completa el lado que falta en ambos triángulos utilizando el Teorema de Pitágoras, justificando su aplicación por las condiciones de cada triángulo, indicando: <i>“Este par de triángulos son congruentes, porque sus lados son iguales, por lo tanto se puede utilizar el criterio L.A.L”</i>	El alumno rotula los vértices de los triángulos y completa la magnitud del lado que falta de ambos triángulos mediante el Teorema de Pitágoras, de la siguiente manera:  Luego indica que los triángulos son congruentes, ya que: <i>“Cumplen con el criterio de lado, ángulo, lado, puesto que poseen ángulos rectos y ambos miden 90°, entonces:”</i> <i>“$AC \cong A'C'$”</i> <i>“$AB \cong A'B'$”</i> <i>“$\angle CAB \cong \angle C'A'B'$”</i>	El alumno rotula los vértices e identifica lados congruentes de la siguiente forma:  Además, en ambos triángulos completa la medida del lado que falta, sin justificar este paso. Luego plantea lo siguiente: <i>“Los triángulos son congruentes, ya que se puede ver claramente que los triángulos tienen igual área, y al ponerlos en igual posición los lados de los triángulos son iguales”.</i>	El alumno afirma que ambos triángulos no son congruentes, pues <i>“a simple vista necesitaría de un lado para determinar que si lo sean, y eso no se puede calcular, pues las medidas de los lados no siguen un criterio, como si lo tienen las medidas de los ángulos”.</i>	De manera visual establece que los triángulos poseen igual área y además un ángulo congruente, por lo tanto ambos triángulos son congruentes. Además, afirma que con esto se puede completar la medida de los lados faltantes en ambos triángulos.

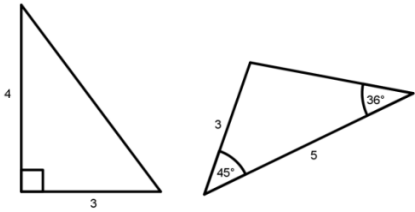
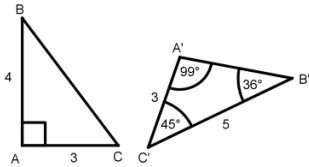
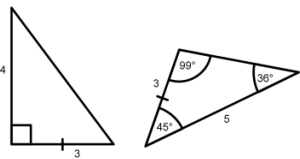
Evaluación La respuesta dada por el alumno es la esperada, pero se contradice en el hecho de argumentar en primera instancia que los triángulos tienen todos sus lados congruentes, luego indica que por esto se puede utilizar el criterio L.A.L, lo cual no es el criterio esperado para tales argumentos dados.	Evaluación La respuesta dada por el alumno es la esperada.	Evaluación La respuesta dada por el alumno es ambigua pues no da detalles de cómo encontró las longitudes que faltan en ambos triángulos, hecho fundamental en este ejercicio, por otro lado utiliza argumentos basados en la visualización que no corresponden al objetivo de esta actividad para justificar la congruencia de ambos triángulos.	Evaluación La respuesta dada por el alumno es la esperada dentro del análisis preliminar.	Evaluación La respuesta dada por el alumno no se considera válida, ya que sus argumentos son basados en la visualización y este hecho no es el pedido para esta actividad, ya el alumno debiera estar utilizando criterios de congruencia.
Gestión de la puesta en común Durante este proceso los alumnos preguntaron sus dudas al docente, logrando finalmente señalar los argumentos que permiten justificar la congruencia de ambos triángulos, cabe señalar que el alumno cinco de manera voluntaria explica los dos criterios que se podían utilizar (L.A.L y L.L.L), indicando en la figura los lados y ángulos respectivos para la aplicación de éstos, en esta situación el docente no necesitó realizar la ronda de preguntas que estaban preparadas en caso que los alumnos no pudieran desarrollar el problema, pues el alumno dos contribuyó fehacientemente al argumentar por medio de la aplicación del teorema de Pitágoras para completar el dato faltante que permite probar la congruencia entre los triángulos.				
Análisis a posteriori Tres alumnos responden de manera esperada, pero uno de ellos se contradice pues argumenta su respuesta dando énfasis en la congruencia de todos los lados de los triángulos pero finaliza su respuesta utilizando el criterio L.A.L, finalmente dos alumnos responden de forma ambigua e inválida puesto que utilizan la visualización como un argumento fuerte para la justificación de su respuesta.				

Situación 5				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno indica que los triángulos no son congruentes, sin poder justificar su respuesta.	El alumno completa la medida del ángulo que falta, para esto establece “<i>sólo hay que sumar los ángulos del segundo triángulo y esta suma restársela a 180°</i>”. Obteniendo lo siguiente:  Luego indica que ambos triángulos son congruentes por el criterio de congruencia A.L.A.	El alumno rotula cada uno de los vértices e identifica segmentos congruentes como muestra la figura:  Luego determina cada una de las medidas de los ángulos faltantes en ambos triángulos (utilizando el teorema de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo). A continuación señala: “<i>Los triángulos son congruentes, ya que tienen igual área y al comparar las medidas todos los lados son iguales (L.L.L), también cumplen con A.L.A y con L.A.L, pues $AB \cong A'B'$ $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ ”</i>	En cada triángulo calcula la medida de los ángulos faltantes, justificando este paso por el teorema que establece que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Teniendo lo siguiente:  Luego establece que “<i>cada triángulo posee un lado de longitud 3 que está entre un ángulo de 109° y uno de 40°, por lo tanto por regla A.L.A los triángulos son congruentes</i>”.	El alumno comienza afirmando que “los triángulos poseen igual área, además según los datos poseen un lado y un ángulo congruentes. Por tanto los triángulos son congruentes”. Para verificar la congruencia de los triángulos el alumno realiza lo siguiente:  Expresando que “<i>si reemplazo los ángulos faltantes con los dados por el otro triángulo, los sumo, me da 180, por lo tanto si tienen sus tres ángulos congruentes, los triángulos son congruentes también</i>”.

Evaluación La respuesta dada por el alumno no es esperada preliminarmente.	Evaluación El alumno determina el ángulo que falta en el segundo triángulo para utilizar el criterio que se esperaba, pero no hace referencia a los lados y ángulos homólogos congruentes que permiten justificar el criterio empleado.	Evaluación El alumno responde de manera no esperada, pues de manera visual establece que ambos triángulos poseen igual superficie, además luego de determinar que los ángulos homólogos son congruentes establece que los dos también lo son. Por lo tanto por criterio de congruencia L.L.L los triángulos son congruentes, a partir de esto, identifica que se cumple los otros dos criterios. Si bien es cierto que los triángulos son congruentes el orden en que empleó los criterios no es el idóneo, pues el que debía utilizar era el criterio A.L.A.	Evaluación La respuesta dada por el alumno es la esperada.	Evaluación El alumno aborda el problema suponiendo que ambos triángulos son congruentes, amparándose en la visualización. Sin embargo, luego de afirmar su respuesta, la verifica, para esto toma la información de ambos triángulos, en particular medida de los ángulos y comprueba que se cumpla una de las propiedades esenciales de los triángulos. En este caso, si bien no es correcto abordar los ejercicios de este modo, se destaca la verificación realizada por el alumno.
Gestión de la puesta en común Durante este proceso los alumnos señalaron los argumentos esperados para indicar la congruencia de los triángulos, bajo la ayuda del docente, ya que no fue de manera inmediata este hecho, por que surgieron bastantes opiniones opuestas, pero finalmente se logró llegar a la respuesta esperada.				
Análisis a posteriori Tres alumnos responde de manera no esperada, un alumno completa correctamente el ángulo faltante en uno de los triángulos para luego utilizar el criterio esperado pero no logra justificar su respuesta, puesto que no hace referencia a los lados y ángulos congruentes, dentro del criterio de congruencia utilizado y finalmente un alumno responde de forma esperada.				

Situación 6				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno da la siguiente respuesta: <i>“Este par de triángulos no es congruente, porque a simple vista no son del mismo tamaño, entonces sus lados tampoco son iguales con el otro”.</i>	El alumno completa la medida que falta de ambos triángulos mediante el teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo, obteniendo:  Luego indica que <i>“los triángulos no son congruentes pues no cumplen con ningún criterio y sólo tienen todos los ángulos iguales pero ningún lado”</i>	El alumno de manera visual establece que <i>“los triángulos no son congruentes pues sus lados no miden lo mismo y las áreas de los triángulos no son iguales”.</i>	Calcula en ambos triángulos los ángulos faltantes, establece que son todos coincidentes, pero recalca que “el tener tres ángulos con igual medida no implica que sus lados midan lo mismo o más aun que los triángulos posean igual área. Por lo tanto, los triángulos no son congruentes.”	El alumno se fija que ambos triángulos poseen un lado y un ángulo congruente, reemplaza las medidas de los ángulos de un triángulo en el otro y los suma, verificando que esta es 180°, determinando que los triángulos aunque suceda esto, no poseen igual superficie, por lo tanto no son congruentes.

Evaluación La justificación del alumno no es válida, pues sus argumentos se sustentan en un proceso visual lo cual no es parte de objetivo de la actividad.	Evaluación La respuesta planteada por el alumno es la esperada.	Evaluación En principio la respuesta del alumno es la esperada, ya que los triángulos en efecto no son congruentes sin embargo los argumentos utilizados no son pertinentes para justificar este hecho, pues hacen referencia a la longitud de los lados y medida de las áreas los cuales no fueron calculados experimentalmente lo que hace suponer que fue un proceso visual.	Evaluación La respuesta del alumno es la esperada.	Evaluación El hecho de que el alumno asegure que los triángulos no son congruentes es lo esperado, pero luego la argumentación dada no es sustentada bajo criterios de validez, ya que no explicita como obtiene la desigualdad de los triángulos, donde el camino a seguir era bajo la argumentación de los criterios de congruencia.
Gestión de la puesta en común Los alumnos en general argumentaron sus respuestas en gran medida utilizando un lenguaje apropiado amparándose en los principios de congruencia, propiedades de triángulos y la igualdad de superficies para argumentar la congruencia o no de los triángulos, cabe señalar que la mayoría de los alumnos intento demostrar de algún modo la congruencia entre los triángulos pero al percatarse que no existen argumentos que validen este hecho presentan justificaciones parciales para probar sus hipótesis. El docente plantea a los alumnos como probar que algún elemento o figura no cumple con cierta propiedad, ante esto los alumnos esbozan ciertas respuestas, mas el alumno cinco plantea que basta con probar que no cumple para un caso para que no se cumpla con todos, luego de unos momentos de discusión el mismo alumno propone que bastaría probar que los triángulos tienen dos lados distintos para justificar la no congruencia, esta situación es entendida correctamente por todos los alumnos lo que permite dar respuesta correcta a la situación.				
Análisis a posteriori Cuatro alumnos respondieron de manera esperada, pero uno de ellos no utiliza los argumentos esperados para la justificación de su respuesta, puesto que revela hechos que nos hacen pensar que estuvieron basados en la visualización y no en hechos concretos, otro alumno de los señalados sustenta sus argumentaciones bajo criterios que no son válidos. Un alumno responde de forma no esperada pues no hace alusión a ningún criterio de congruencia además sus argumentos son basados sólo en la visualización para la justificación su respuesta.				

Situación 7				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno señala lo siguiente: “Este par de triángulos no son congruentes porque sus lados no son congruentes”.	El alumno rotula los vértices de los triángulos y completa la medida del ángulo faltante mediante el teorema de la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo, obteniendo:  Luego indica “los triángulos no son congruentes pues sólo tienen un lado igual, pero no tienen ángulos iguales ya que $\angle CAB$ mide 90° y el $\angle C'A'B'$ mide 99°”.	El alumno determina la medida del ángulo faltante en el segundo triángulo (utilizando el teorema de la medida de los ángulos interiores en un triángulo) y rotula los lados congruentes, como muestra la figura:  Luego el alumno establece que los triángulos no son congruentes pues • “No tienen ángulos iguales” • “Poseen sólo un lado igual”	El alumno de manera visual establece: “es poco probable que los triángulos sean congruentes, pues el primer triángulo sólo posee la información de la medida de un ángulo y no se sabe cuánto miden los otros dos, además sólo se muestra que las figuras tienen sólo un lado que coinciden”	El alumno de manera visual establece que los triángulos son congruentes pues ambos poseen “igual área, un ángulo congruente (ángulo recto) y un lado.”

Evaluación La respuesta del alumno es la esperada pero incompleta pues no justifica su afirmación	Evaluación La respuesta dada por el alumno es la esperada, además éste es capaz de darse cuenta que al no poseer un par de ángulos congruentes y amparado en la definición de congruencia argumenta que los triángulos no serán congruentes al no cumplirse fehacientemente la definición.	Evaluación La respuesta dada por el alumno es la esperada.	Evaluación La respuesta dada por el alumno es la esperada, además cabe señalar que mediante los argumentos dados se entiende que no es posible utilizar ninguno de los criterios de congruencia.	Evaluación La respuesta dada por el alumno no es la esperada.
Gestión de la puesta en común Durante esta instancia el alumno dos voluntariamente explica a sus compañeros los argumentos utilizados para justificar sus respuesta, a lo cual el docente señala que su respuesta es la correcta, luego el alumno cinco presenta sus argumentos que difieren de los anteriores, sin embargo luego de confrontar sus hipótesis llegan a conclusiones análogas.				
Análisis a posteriori Cuatro alumnos responden de manera esperada, uno de éstos de manera incompleta, ya que no justifica su respuesta, y finalmente un alumno de manera no esperada.				

5.5 Ingeniería de la situación de aprendizaje 4

Justificación de la cuarta actividad

La exploración en busca de propiedades y la visualización de relaciones geométricas lleva a la formulación de una conjetura, de esta manera explicitamos un hecho geométrico que puede ser comprobado. Aquí entra en juego la verificación de propiedades geométricas con el propósito de poner a prueba un enunciado sobre el que aun no se tiene la certeza absoluta, la cual sólo se consigue mediante la demostración.

Se plantea esta actividad con el propósito que los alumnos establezcan estos enunciados, expresándolos de forma general determinados mediante el uso de definiciones y relaciones de conceptos donde el alumno sienta la necesidad de hacer uso de alguna justificación en general, apoyada en propiedades conocidas que lleven directamente al resultado.

La actividad no se termina en el momento en que se formula alguna conjetura, el docente debe hacer notar que si bien los estudiantes se conformarían con la verificación para el caso particular, deben impulsar la visión de la actividad demostrativa en geometría en pos de la construcción de un discurso argumentativo, de carácter deductivo, que valide la conjetura dentro del sistema axiomático que se ha construido.

Los estudiantes en la actividad explorarán la figura, descubrirán y formularán su conjetura para luego confrontar sus resultados frente al grupo, se enfrentarán a la necesidad de explicar sus construcciones a otros, lo que ellos vieron, descubrieron, pensaron y concluyeron, donde el razonamiento se transforma en un medio para entender, explicar y convencer a otros de la validez de la conjetura descubierta.

La secuencialidad de las actividades propuestas permite a los alumnos experimentar con figuras o situaciones geométricas, el análisis de propiedades, la exploración y finalmente la formulación de conjeturas, su comprobación o su rechazo por falta de validez y la generalización a situaciones análogas.

Objetivo de la Actividad

Generalizar afirmaciones presentes en un caso particular producto de la visualización y experimentación.

Metodología de la Actividad

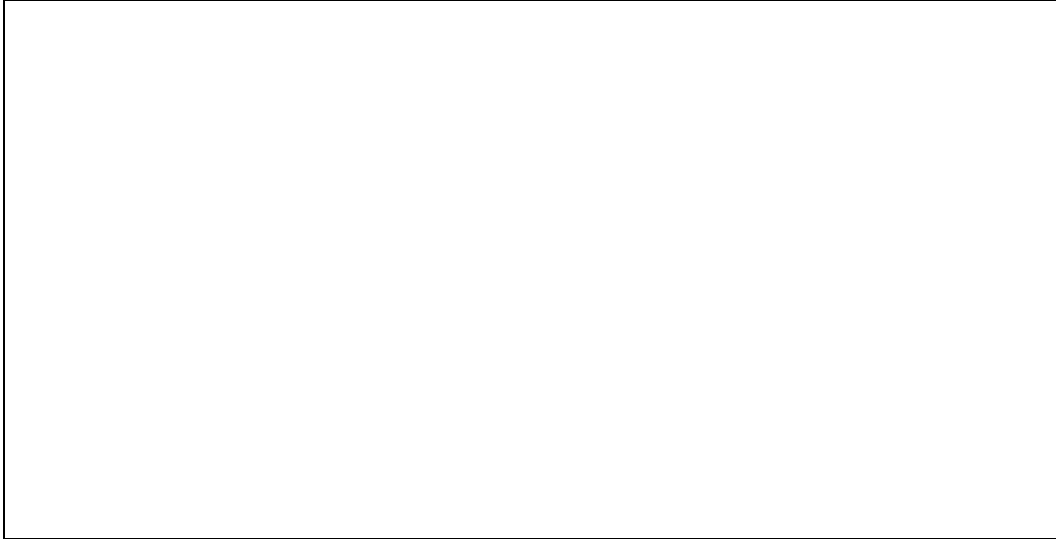
Se entregará la Ficha N°4, donde se propone un trabajo individual y autónomo, la actividad es monitoreada por el docente en la búsqueda de lograr la construcción del saber por parte del alumno, una vez finalizada la actividad el profesor debe instaurar un ambiente que propicie el diálogo entre los alumnos en pos de lograr la validez de los enunciados propuestos al grupo muestra.

Al supervisar el desarrollo de la actividad el docente procurará:

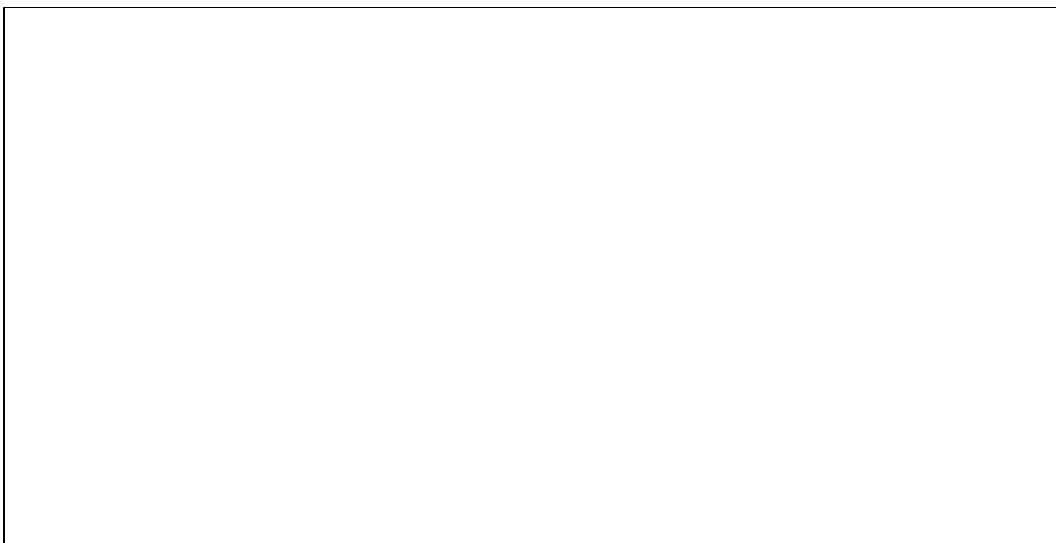
- Inducir al alumno a utilizar argumentos generales, ya sean definiciones, postulados o axiomas, para justificar la existencia de triángulos congruentes en ambas figuras.
- Apoyar constantemente a los alumnos en caso que lo requieran, en relación a contenidos en que éstos se encuentren confundidos o les den un mal uso (ya que no se espera que el alumno recuerde necesariamente todos los saberes de manera correcta, sino más bien que logre darse cuenta de las condiciones que deben suceder para que ocurra lo pedido.)
- Incentivar a los alumnos a justificar cada argumento obtenido, con el propósito de que utilicen un proceso coherente para llegar a establecer enunciados que tengan credibilidad y convencimiento.

Ficha N° 4

1. Dado un triángulo ABC isósceles, se tiene un punto D sobre el trazo AB . Determinar cuál(es) es (son) la(s) condición(es) que debe cumplir el trazo CD de manera que se formen interiormente dos triángulos congruentes. Justifica tu respuesta.



2. Dado un triángulo, dividido en otros cuatro triángulos en su interior. Determinar qué condiciones debe satisfacer el triángulo y sus divisiones internas para que los triángulos interiores sean congruentes entre sí. Justifique su respuesta.

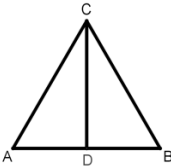


Análisis a priori de la actividad N° 4

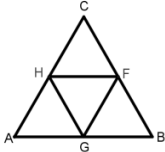
Observación 1: no se analizará la gráfica que resulta del encabezado del ejercicio, puesto que si el alumno no logra representarla el docente prestará ayuda para esbozar la figura.

Observación 2: Se calificarán las posibles respuestas de los alumnos de la siguiente manera

1. Correcta: se representará como respuesta esperada.
2. Incompleta: se representará como respuesta esperada (incompleta). Este tipo de respuesta presenta un desarrollo correcto, sin embargo, puede suceder que no se presentan verificaciones, justificaciones, datos utilizados en los argumentos, entre otros. En este caso el docente en la confrontación grupal debe incentivar al alumno a completar su desarrollo, con el fin de lograr una respuesta correcta.
3. Incorrecto: se calificará como respuesta esperada (incorrecta). En este caso el docente, junto con los alumnos deben, mediante una confrontación de estrategias, llegar a un consenso de modo de lograr una respuesta correcta en conjunto.

Situación 1	
Dado un triángulo ABC isósceles, se tiene un punto D sobre el trazo AB . Determinar cuál(es) es (son) la(s) condición(es) que debe cumplir el trazo CD de manera que se formen interiormente dos triángulos congruentes. Justifica tu respuesta.	
Figura asociada al enunciado 	
Respuesta Esperada 1 Como el triángulo ABC isósceles, luego $AC \cong BC$. Por otro lado $DC \cong DC$ Ahora para que el triángulo ADC sea congruente con el triángulo DBC, se debe cumplir que D sea punto medio del trazo AB, para que luego $AD \cong DB$. Por lo tanto el trazo CD debe ser un segmento que une C con D, donde D es punto medio del trazo AB	
Respuesta Esperada 2a (Incompleta) El trazo CD debe pasar por el punto medio del trazo AB y ser perpendicular a este mismo, para así por medio del criterio de congruencia L.A.L los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle DBC$ formados sean congruentes.	Respuesta Esperada 2b (Incompleta) El trazo CD debe pasar por el punto medio del trazo AB, como el triángulo ABC es isósceles sus ángulos basales son congruentes, además como los lados AB y BC también son congruentes, se tiene por criterio de congruencia L.A.L los triángulos que se forman son congruentes.

Respuesta Esperada 3a (Incompleta) (Trazo CD Transversal de Gravedad) Por definición de transversal de gravedad el trazo CD intercepta al trazo AB en el punto medio, de esa manera $AD \cong DB$, además el triángulo es isósceles por lo cual los ángulos basales son congruentes y $CA \cong CB$, razón por la que se afirma que los triángulos ADC y DBC son congruentes por principio de congruencia L.A.L	Respuesta Esperada 3b (Incompleta) (Trazo CD Transversal de Gravedad) Por definición de transversal de gravedad el trazo CD intercepta en D al trazo AB en el punto medio, de esa manera $AD \cong DB$, como el triángulo ABC isósceles $CA \cong CB$, además $CD \cong CD$ (todo trazo es congruente consigo mismo) razón por la que se afirma que los triángulos ADC y DBC son congruentes por principio de congruencia L.L.L
Respuesta Esperada 4 (Incompleta) Trazo CD bisectriz $\sphericalangle ACB$, se tiene que $\sphericalangle DCA$ y $\sphericalangle BCD$ son congruentes, además $CA \cong BC$ ($\triangle ABC$ isósceles) y $CD \cong CD$ (todo trazo es congruente consigo mismo), por lo cual los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle DBC$ son congruentes por principio de congruencia L.A.L.	

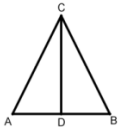
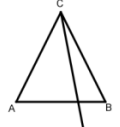
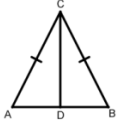
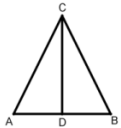
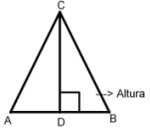
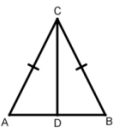
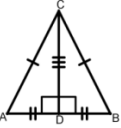
Situación 2	
Dado un triángulo, dividido en otros cuatro triángulos en su interior. Determinar condiciones para el triángulo ABC y sus divisiones internas, de modo que los triángulos interiores sean congruentes entre sí. Justifique su respuesta.	
Figura asociada al enunciado:	
Respuesta Esperada 1 El triángulo ABC debe ser equilátero, los puntos H, F y G deben ser puntos medios de los trazos AC, CB y AB respectivamente. Bajo estas condiciones los triángulos AGH, CHF y FGB son congruentes. Se justifica la congruencia entre los triángulos CHF, AHG y FGB por medio del principio de congruencia L.A.L, pues el triángulo ABC es equilátero y las medidas de los ángulos interiores son congruentes (60°) pero no logran justificar la congruencia del triángulo HFG por este mismo principio. Ante esta situación el alumno puede argumentar que el triángulo HGF es congruente con los demás, por medio del principio de congruencia L.L.L basándose en la definición de congruencia de los otros tres triángulos interiores.	
Respuesta Esperada 2 (Incompleta) El triángulo ABC debe ser equilátero, los puntos H, F y G deben ser puntos medios de los trazos AC, CB y AB respectivamente. Bajo estas condiciones los triángulos AGH, CHF y FGB son congruentes. Se justifica la congruencia entre todos los triángulos interiores por medio del principio de congruencia L.L.L. En este caso el alumno sin mayor justificación argumenta su respuesta mediante este criterio. Asumiendo que los trazos HF, HG y FG son congruentes con los otros trazos (CH, CF, HA, AG, FB y BG) sin mayor evidencia. El profesor deberá incitar al alumno a justificar su respuesta mediante propiedades o condiciones que aseguren ese hecho.	
Respuesta Esperada 3 (Incompleta) El triángulo ABC debe ser equilátero, los puntos H, F y G deben ser puntos medios de los trazos AC, CB y AB respectivamente. Bajo estas condiciones los triángulos AGH, CHF y FGB son congruentes. Se justifica la congruencia entre los triángulos CHF, AHG y FGB por medio del principio de congruencia L.A.L, ya que el triángulo ABC es equilátero las medidas de los ángulos interiores son congruentes (60°) pero no logran justificar la congruencia del triángulo HFG por este mismo principio. Ante esta situación el alumno puede argumentar que el triángulo HGF no es congruente con los demás al no haber principio de congruencia que lo justifique.	

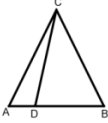
Respuesta Esperada 4 (Incompleta)

El triángulo grande debe ser equilátero, pero no se sabe nada sobre los cuatro triángulos interiores, ya que falta información.

Esto se puede producir por la falta de conocimientos referentes a triángulos equiláteros. El profesor puede corregir este hecho mediante el recuerdo de propiedades que ayuden al alumno a recordar conceptos y llegar a alguna conclusión.

Análisis a posteriori y evaluación de cada figura de la actividad N° 4

Situación 1				
Dado un triángulo ABC isósceles, se tiene un punto D sobre el trazo BC . Determinar cuál(es) es (son) la(s) condición(es) que debe cumplir el trazo CD de manera que se formen interiormente dos triángulos congruentes. Justifica tu respuesta.				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno realiza la siguiente figura:  Luego de analizar la figura señala que: “El trazo AB debe estar perpendicular al trazo CD” A continuación señala que: “CD es Transversal” Finalmente realiza la siguiente figura, señalando que:  “No es congruente”	El alumno mediante el proceso de ensayo y error logra obtener el dibujo esperado, tachando con una cruz los que no se deben considerar y dejando el siguiente:  En él se visualiza la congruencia de los trazos AC y CB (por ser triángulo ABC isósceles). Luego indica lo siguiente: “debe cumplir que el trazo AD sea igual al trazo DB”. Argumento que utiliza el alumno para afirmar: “Para que sean congruentes la línea trazada debe estar en el medio, ya que así quedarían dos triángulos iguales, que si se superponen serán congruentes”	El alumno realiza la siguiente figura:  Luego indica lo siguiente: “El trazo AD debe ser igual al trazo DB, por lo cual, el punto D debe ser perpendicular a AB y ubicarse en medio de los vértices A y B, de esa forma los dos triángulos quedan iguales y son congruentes”. Resume lo anteriormente describo, mediante la siguiente figura:  Por último el alumno realiza la siguiente figura, destacando lo siguiente:	El alumno realiza la siguiente figura:  Donde se visualiza la congruencia de los trazos AC y CB (por ser triángulo ABC isósceles). En pos de esto señala que “el trazo debe ser perpendicular justo en la mitad del triángulo para que así tengan ambos triángulos ángulos rectos y cumplan con dos lados iguales o también sus tres lados iguales”. A partir de esto presenta la siguiente figura:  En donde explica que claramente se puede utilizar el criterio de congruencia L.L.L y L.A.L, por lo tanto	Alumno ausente.

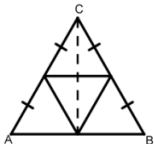
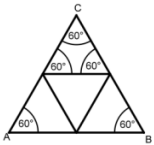
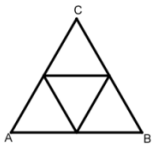
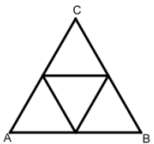
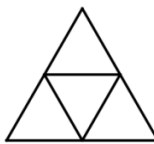
		 <i>“Si no cumple lo dicho anteriormente un triángulo será más grande que otro”</i>	los triángulos son congruentes.	
Evaluación El alumno logra distinguir las condiciones necesarias que debe cumplir el trazo CD . Si bien, la respuesta es correcta, el alumno olvida el concepto de transversal de gravedad, pues luego de trazarla (de manera incorrecta) concluye que con las condiciones dadas no se forman triángulos congruentes. Lo cual es una contradicción a su respuesta.	Evaluación El alumno indica que el punto D debe ser punto medio del trazo AB , situación esperada, pero cabe señalar que hace referencia a la superposición para justificar su afirmación. Lo cual es correcto, sin embargo se esperaba que el alumno señalara sólo argumentos sustentados en propiedades, definiciones, axiomas, para justificar que los triángulos sean congruentes.	Evaluación Cabe señalar que la respuesta del alumno es correcta, pero no es el punto D el que debe ser perpendicular al trazo AB sino mas bien el trazo CD , fuera de esto indica que el punto D se debe ubicar en el punto medio del trazo AB , hecho fundamental en la justificación de la formación de los dos triángulos congruentes. Se esperaba que el alumno realizara este desarrollo, aunque se tomará incompleta pues sólo justifica sus respuestas de manera visual y utilizando sus conjeturas, no un criterio de congruencia.	Evaluación El alumno logra completar la respuesta en forma exitosa. Siendo esto una de las respuestas esperadas.	Evaluación Alumno Ausente
Gestión de la puesta en común Luego de que cada alumno realizó la actividad de manera individual, el docente realiza la confrontación de sus ideas. Los alumnos uno, dos y tres exponen sus conclusiones, pero en el momento en que el docente pregunta ¿Por qué llegaste a esto? ¿Qué hecho matemático utilizaste? ¿Utilizaste algún criterio de congruencia? Los alumnos sólo responden basándose en la intuición, visualización y otro (como el alumno dos) en el descarte de posibles soluciones, siendo argumentos sin fuerza al momento de convencer al grupo. Sin embargo el alumno cuatro, realiza la demostración de forma completa (de manera verbal), alcanzando convencer a todos sus compañeros de su trabajo. Cabe señalar que en general la necesidad de demostrar nace de los mismos alumnos, con el fin de poder justificar cada una de sus conjeturas. Sin embargo, el				

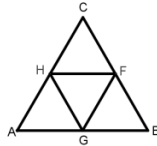
lenguaje empleado y el orden de sus afirmaciones no presentan una estructura pertinente o clara. Además se hace notar que las justificaciones presentadas por los alumnos tres y cuatro en sus escritos son consideradas como pruebas, mas no como demostraciones formales.

Análisis a posteriori

Antes de comenzar este análisis es relevante dejar en claro que los alumnos ante la palabra “debe” respondieron dando una condición suficiente que se infería del problema, y no una condición necesaria y suficiente para ello.

Tres alumnos responden de manera incompleta, donde uno de ellos hace alusión a la superposición de los triángulos, hecho que no era esperado para el avance de la actividad, sino mas bien se esperaban sólo argumentos sustentados en definiciones, propiedades, entre otros, otro de ellos hace referencia a la visualización como parte de sus argumentaciones, finalmente un alumno, si bien en principio logra distinguir las condiciones que se esperaban, concluye de forma contradictoria, pues indica que con estas condiciones no se forman triángulos congruentes.

Situación 2				
Dado un triángulo, dividido en otros cuatro triángulos en su interior. Determinar condiciones para el triángulo ABC y sus divisiones internas, de modo que los triángulos interiores sean congruentes entre sí. Justifique su respuesta.				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno realiza la siguiente figura:  Luego analiza la figura indicando que: • “El triángulo ABC debe ser equilátero” • “Los triángulos pequeños deben ser congruentes” Finalmente realiza la siguiente figura: 	El alumno realiza la siguiente figura:  Inmediatamente analiza la figura indicando lo que sigue: “Para que sean congruentes debe cumplir con el criterio de tener todos sus lados iguales (todos los triángulos). Debe ser un triángulo equilátero ya que así al dividir en cuatro triángulos todos los lados quedarán iguales”	El alumno realiza la siguiente figura:  Luego de analizar la figura indica lo siguiente: • “Debe ser equilátero” • “Se debe trazar un triángulo en el interior” • “Se formarán cuatro triángulos más, serán equiláteros también, por la forma del triángulo grande” • “Los triángulos tendrán	El alumno realiza la siguiente figura:  Luego de analizar la figura, indica que, “Este triángulo debe cumplir con todos sus ángulos y lados iguales, además debe ser un triángulo equilátero para que así se pueda dividir en cuatro triángulos equiláteros más”.	Alumno ausente.

Indicando que los ángulos interiores del triángulo ABC deben medir todos 60° , por ser equilátero, luego señala que uno de los triángulos interiores también debe tener todas las medidas de los ángulos interiores igual a 60° .		<i>todos sus lados y ángulos iguales, por lo cual, serán congruentes"</i> • <i>"Los puntos del nuevo triángulo, debe ser punto medio"</i>		
Evaluación La respuesta es la esperada. Sin embargo el alumno no es capaz de justificar sus conjeturas.	Evaluación La respuesta es una de las esperadas, más aún el alumno logra justificar parcialmente su conjetura por medio del criterio de congruencia L.L.L de manera implícita.	Evaluación La respuesta es esperada, aunque las conjeturas establecidas, que el triángulo mayor debe ser equilátero, y que los vértices del triángulo menor son puntos medios de sus respectivos lados, son correctas, su justificación no logra ser la adecuada, por redundar en hechos ya señalados anteriormente.	Evaluación El alumno realiza uno de los procedimientos esperados, sólo haciendo énfasis en que el triángulo mayor debe ser equilátero, dejándolo como información suficiente para justificar que los triángulos interiores son congruentes.	Evaluación Alumno Ausente
Gestión de la puesta en común El docente al realizar la confrontación grupal recolecta cada una de las conjeturas realizadas por los alumnos, en esta se determinan lo siguiente: (El docente, para ayudar a la escritura de las ideas esboza la siguiente figura)  El triángulo ABC debe ser equilátero. El triángulo GFH debe ser equilátero. Los triángulos al ser equiláteros, poseen ángulos interiores de 60° cada uno. Los puntos H, F y G son puntos medios. El docente luego de obtener cada una de estas conjeturas, pregunta a sus alumnos como poder comprobar que esto es cierto. Los alumnos uno y tres solo logran explicar que por medio del descarte de opciones se llegó a justificar lo pedido, sin embargo los alumnos dos y cuatro logran justificar por medio de un criterio de congruencia cada una de sus conjeturas, aún más estos alumnos logran utilizar criterios distintos, logrando convencer a sus pares y al docente.				
Análisis a posteriori Los cuatro alumnos responden de forma esperada, pero uno de ellos no es capaz de justificar sus propias conjeturas, otro de ellos redundante en sus justificaciones, puesto que utiliza hechos ya señalados por él mismo.				

5.6 Ingeniería de la situación de aprendizaje 5

Justificación de la quinta actividad

En términos generales los estudiantes no son suficientemente conscientes del papel estructural que los conectivos juegan en el razonamiento deductivo y no tienen un buen dominio de ellos, hecho que aumenta la complejidad que tienen que afrontar y superar cuando están adquiriendo la habilidad de demostrar (Perry y otros, 2006). Adicionalmente dado que la validez de los argumentos está centrada en la lógica, cualquier acción que no sea coherente con ella o que no dé lugar a un teorema real llevará necesariamente a una conclusión inválida.

Se ha propuesto esta actividad con el fin de acercar intuitivamente al alumno al Modus Ponens, más precisamente a la implicación, para ello se han formulado proposiciones, donde el alumno debe completar intuitivamente por medio de causa y efectos de enunciados una frase implicativa de una premisa dada.

Dado que la forma como las personas razonan en sus actividades diarias es contraria, en muchos casos, a la forma de razonar en matemática, constituyendo el razonamiento común un obstáculo, que conduce a innumerables errores que se manifiestan en los alumnos (Perry y otros, 2006). Se proponen en primera instancia enunciados relacionados con la cotidianidad para a medida que se avanza en la adquisición del concepto incluir enunciados “matemáticos”.

Cabe señalar que la secuencialidad que proponen los niveles de Van Hiele toma esta actividad como necesaria y fundamental en el propósito de nuestro trabajo, ya que promueve en los alumnos el razonamiento lógico el cual es de suma necesidad, ayudando en la actividad demostrativa, en actividades anteriores los alumnos logran procesos que conllevan a la demostración formal, mas consideramos necesario entregar la estructura lógica que se manifiestan en toda demostración.

Objetivo de la Actividad

Acercar intuitivamente a los alumnos a la deducción de afirmaciones por medio de la implicación.

Metodología de la actividad

Se entregará la Ficha N°5, donde los alumnos deberán trabajar de manera individual, el docente debe tener presente que en primera instancia los ejercicios seguirán implícitamente el formato de $P \Rightarrow Q$ donde P es condición necesaria y suficiente para Q .

Al supervisar el desarrollo de la actividad el docente procurará:

- Orientar la actividad con el propósito que el alumno logre construir de manera autónoma el resultado esperado.
- Explicar brevemente “sin entrar en mayores detalles” a los alumnos el significado de la implicación.

Ficha N° 5

Completar la frase que falta para cada una de las siguientes proposiciones

1. A todos los niños les gusta jugar futbol. Mi hermano tiene 7 años.
A mi hermano.....
2. Juan siempre se ríe cuando dice un chiste. Juan está diciendo un chiste.
Juan.....
3. Todos los domingos mi tío va al estadio. Hoy es domingo.
Mi tío.....
4. Si aumenta el desempleo en Chile aumenta la delincuencia.
Este mes el desempleo aumentó considerablemente.....
5. En cualquier triángulo isósceles los ángulos de la base son congruentes.
Dado un $\triangle ABC$, $AC \cong BC$
El $\triangle ABC$
6. Dos triángulos equiláteros son congruentes si tienen un lado congruente.
Dados los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ equiláteros y $AB \cong A'B'$
Los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son.....
7. A los niños les gustan las mascotas pequeñas. La gente que le gustan las mascotas pequeñas es sensible.
Mi sobrina Fernanda tiene 4 años.
Fernanda.....
8. La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° . Los ángulos complementarios son aquellos que la suma de sus medidas es un ángulo recto. Dado el $\triangle ABC$ los ángulos $\sphericalangle CAB$ y $\sphericalangle CBA$ son complementarios.
El ángulo $\sphericalangle ACB$ mide.....

Análisis a priori de la actividad N°5

Observación: Para hacer notar el uso de la implicación, los análisis se llevarán a cabo mediante el formato **P** (Hipótesis) $\Rightarrow$ **Q** (Tesis), situación que no se pide a los alumnos que realicen, sólo se presenta para un mejor entendimiento de los análisis.

Situación 1
Hipótesis: A todos los niños les gusta jugar fútbol. Mi hermano tiene 7 años Conclusión: A mi hermano..... En esta situación no es muy difícil percatarse de la conclusión que se espera (A mi hermano le gusta jugar fútbol), los alumnos logran notar la premisa que se entrega (mi hermano tiene 7 años) para comprender que ésta es suficiente para que se cumpla la hipótesis “a todos los niños les gusta jugar fútbol”. Ahora bien puede surgir en los alumnos el inconveniente de no relacionar la edad del hermano con la cualidad de ser niño, pero esta situación puede ser aclarada por el docente.

Situación 2
Hipótesis: Si Juan dice un chiste siempre se ríe al contarlos. Juan está diciendo un chiste. Conclusión: Juan..... Los alumnos entienden que si Juan dice un chiste este se ríe, es decir toman la frase “Juan dice un chiste” como suficiente para que “Juan se ría” por lo cual al darse la premisa Juan está diciendo un chiste ésta implica que Juan se está riendo.

Situación 3
Hipótesis: Todos los domingos mi tío va al estadio. Hoy es domingo Conclusión: Mi tío..... Los alumnos trabajan el concepto de causa y efecto, donde el hecho de ser día domingo es condición suficiente para que el tío vaya al estadio, es decir los alumnos implícitamente logran comprender que en la implicación que se tiene: P (todos los domingos) $\Rightarrow$ Q (mi tío va al estadio) basta con que se tenga la primera proposición para que sea verdadera la implicación.

Situación 4
Hipótesis: Si aumenta el desempleo en Chile aumenta la delincuencia. Este mes la delincuencia aumentó Conclusión: Esta situación se vuelve un poco más compleja para los alumnos, por lo tanto se pueden plantear tres situaciones: En primera instancia de forma implícita los alumnos entienden la implicación que se presenta en los enunciados: P (Si aumenta el desempleo) $\Rightarrow$ Q (Aumenta la delincuencia), luego al tener la proposición “este mes la delincuencia aumentó” consideran suficiente para que se tenga como verdadera la proposición “aumenta el desempleo en Chile” por lo cual concluyen esta última proposición como conclusión, donde el error que se comete es confundir la implicación con la equivalencia entre proposiciones. Ahora bien, otra forma de afrontar el problema por los alumnos es considerar (de forma implícita) en primera instancia la proposición que se tiene como verdadera (Este mes la delincuencia aumentó) y en base a esta, para responder al problema, afirman que la implicación P (aumenta la delincuencia) $\Rightarrow$ Q (aumenta el desempleo en

Chile) lo que repercute en que la conclusión que el alumno entrega es que aumenta el desempleo en Chile, en este caso el problema no es la confusión anterior sino no interpretar bien los datos que se entregan ni identificar correctamente las proposiciones.

Como respuesta correcta los alumnos de forma implícita son capaces de entender la implicación que se presenta en los enunciados: **P** (Si aumenta el desempleo) $\Rightarrow$ **Q** (Aumenta la delincuencia), luego al tener la proposición “este mes la delincuencia aumentó” asumen esta sólo como condición de la implicación lo cual implica que no se puede afirmar nada con los datos que se entregan.

Situación 5

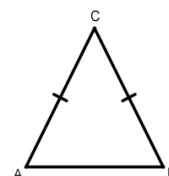
Hipótesis: Cualquier triángulo isósceles tiene sus ángulos de la base congruentes

Dado un $\triangle ABC$, $AC \cong BC$

Conclusión: El $\triangle ABC$

Los alumnos en primera instancia trabajan análogamente a las situaciones anteriores, en donde de manera implícita plantean la implicación como **P** (dado un triángulo isósceles) $\Rightarrow$ **Q** (este tiene sus ángulos congruentes) pero al momento de interpretar el lenguaje matemático que se podría proceder de dos formas:

1. Como entiende el lenguaje, realiza un dibujo con los datos que se presentan. Ante esta situación el alumno recuerda que los triángulos que tienen dos lados congruentes son llamados triángulos isósceles, en este momento comprende la afirmación “ángulos de la base” (esto es clave pero no relevante en el objetivo de la actividad por lo cual si no se recuerda el docente lo hará) por lo tanto $\angle CAB \cong \angle CBA$ que es la conclusión que se espera.
2. Los estudiantes también pueden realizar el proceso sin realizar un dibujo de la situación, pero en este caso deben interpretar los datos por medio de la figura que representa, el proceso es similar al anterior pero además se puede esperar respuestas como “los ángulos de la base son congruentes” pero sin saber a ciencia cierta si se sabe cuáles son tales ángulos, en ambos casos los alumnos entienden que dada la implicación que se entrega es suficiente para demostrar su veracidad al tener como verdad la proposición “triángulo isósceles”.
3. Una respuesta incompleta dada por el alumno sería que solamente exprese “el triángulo es isósceles”, es decir, el alumno no recurre a la hipótesis planteada para concluir, sino más bien sólo recurre a los datos entregados.



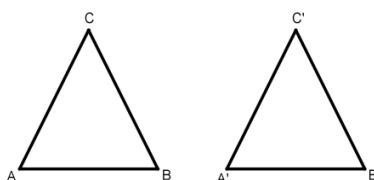
Situación 6

Hipótesis: Dos triángulos equiláteros son congruentes si tienen un lado congruente.

Dados los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ equiláteros $AB \cong A'B'$

Conclusión: Los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son.....

En una primera instancia trazan el dibujo que representa la situación:



Donde deben saber que los triángulos equiláteros tienen todos sus lados y ángulos congruentes (si esta propiedad se desconoce el docente la recordará, ya que este no es el objetivo de la actividad), implícitamente los alumnos plantean la implicación del problema de diversos modos, una primera interpretación: **P** (Dado dos triángulos

equiláteros congruentes) $\Rightarrow$ Q (tienen un lado congruente) lo que es correcto pero no es la interpretación que se espera, el alumno en este caso puede encontrar la conclusión válida (los triángulos son congruentes) dado los datos que se entregan, pero el proceder no es el correcto y también puede entregar conclusiones erróneas como “los triángulos tienen un lado congruente” lo que es una proposición ya válida. Otra interpretación del problema es: P (si dos triángulos equiláteros tienen un lado congruente) $\Rightarrow$ Q (estos triángulos son congruentes) que es la implicación que se espera, luego como se tiene como proposición verdadera P el alumno llega a dar como conclusión Q. Además los alumnos al conocer las propiedades de triángulos equiláteros pueden responder a la conclusión (por sus conocimientos previos y una pequeña inferencia) pero ante esta situación se incentivará a los alumnos a trabajar utilizando un proceso de causa y efecto.

Situación 7
Hipótesis: A los niños les gustan las mascotas pequeñas. La gente que le gustan las mascotas pequeñas es sensible. Mi sobrina Fernanda tiene 4 años. Conclusión: La dificultad que puede presentar el alumno en este caso, es que no logre inferir que “a los niños que le gustan las mascotas pequeñas” implica que sean sensibles, luego si se desea concluir “mi sobrina Fernanda tiene 4 años” se debe hacer uso de la condición “la gente que le gustan las mascotas pequeñas es sensible”, por lo tanto haga una conclusión incompleta, la cual sería, a mi sobrina Fernanda le gustan las mascotas. La otra posibilidad es que el alumno logre hacer la inferencia correcta, vale decir que complete la frase diciendo que: como mi sobrina es una niña por lo tanto le gustan las mascotas pequeñas luego Fernanda es sensible.

Situación 8
Los ángulos complementarios son aquellos que la suma de sus medidas es un ángulo recto. Dado el $\triangle ABC$ los ángulos $\sphericalangle CAB$ y $\sphericalangle CBA$ son complementarios. El ángulo $\sphericalangle ACB$ mide..... El ángulo $\sphericalangle ACB$ mide 90° En este caso el alumno logra asociar los datos de la hipótesis de manera que logra hacer la inferencia correcta de lo que se le está pidiendo. Por otro lado, es posible que el alumno no recuerde la propiedad de triángulos, la cual se refiere a la suma de las medidas de los ángulos interiores debe ser 180°, trayendo consigo la dificultad de realizar la inferencia pedida.

Análisis a posteriori y evaluación de la actividad N° 5

Situación 1				
A todos los niños les gusta jugar fútbol. Mi hermano tiene 7 años A mi hermano.....				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
“También le gusta jugar fútbol”	“Le gusta jugar fútbol”	“Le gusta el fútbol”	“Le gusta el fútbol”	“Le gusta el fútbol”
Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada
Análisis a posteriori Los cinco alumnos logran hacer la inferencia esperada.				

Situación 2				
Juan siempre se ríe cuando dice un chiste. Juan está diciendo un chiste Juan.....				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
“Se ríe”	“Se está riendo”	“Se está riendo”	“Se está riendo”	“Se está riendo”
Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada
Análisis a posteriori Los cinco alumnos logran hacer la inferencia esperada.				

Situación 3				
Todos los domingos mi tío va al estadio. Hoy es domingo Mi tío.....				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
“Va al estadio”	“Va al estadio”	“Está en el estadio”	“Se fue al estadio”	“Va al estadio”
Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada
Análisis a posteriori Los cinco alumnos logran hacer la inferencia esperada.				

Situación 4				
Si aumenta el desempleo en Chile aumenta la delincuencia. Este mes el desempleo aumentó considerablemente				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
“La delincuencia aumenta considerablemente”	“Entonces aumentará la delincuencia”	“La delincuencia aumentó considerablemente”	“La delincuencia este mes aumenta”	“En Chile aumentó la delincuencia”
Evaluación El alumno no logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno no logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno no logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno no logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno no logra hacer la inferencia esperada
Análisis a posteriori Los cinco alumnos no logran hacer la inferencia esperada.				

Situación 5				
En cualquier triángulo isósceles los ángulos de la base son congruentes. Dado un $\triangle ABC$, $AC \cong BC$ El $\triangle ABC$				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
“Isósceles”	“Es isósceles”	“Es isósceles”	“Es isósceles (por lo tanto son congruentes)”	“Es isósceles”
Evaluación El alumno no logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno no logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno no logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno no logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno no logra hacer la inferencia esperada
Análisis a posteriori Los cinco alumnos no logran hacer la inferencia esperada.				

Situación 6				
Dos triángulos equiláteros son congruentes si tienen un lado congruente Dados los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ equiláteros $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ Los $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ son.....				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
“Congruentes”	“Congruentes”	“Congruentes”	“Congruentes”	“Congruentes”
Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada
Análisis a posteriori Los cinco alumnos logran hacer la inferencia esperada.				

Situación 7				
A los niños les gustan las mascotas pequeñas. La gente que le gustan las mascotas pequeñas es sensible. Mi sobrina Fernanda tiene 4 años Fernanda.....				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
“Es sensible”	“Es sensible”	“Es sensible”	“Es sensible”	“Es sensible”
Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada
Análisis a posteriori Los cinco alumnos logran hacer la inferencia esperada.				

Situación 8				
La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180° . Los ángulos complementarios son aquellos que la suma de sus medidas es un ángulo recto. Dado el ΔABC los ángulos $\angle CAB$ y $\angle CBA$ son complementarios El ángulo $\angle ACB$ mide.....				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
“ 90° ”	“ 90° ”	“ 90° ”	“ 90° ”	“ 90° ”
Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada	Evaluación El alumno logra hacer la inferencia esperada
Análisis a posteriori Los cinco alumnos logran hacer la inferencia esperada.				
Gestión de la puesta en común Durante esta instancia el docente analizó la situación cuatro y cinco, ya que fue en éstas donde todos los alumnos presentaron inferencia incorrectas, por lo cual se explicó en la primera, que la frase señalada no se encontraba expuesta de la forma “Causa y Efecto” (P implica Q), siendo necesario reordenar la información, los alumnos en principio refutaban este hecho señalando que “no importa el orden, ya que sólo se espera contestar de forma lógica”, pero el docente debió hacer énfasis en la estructura de esta proposición donde los alumnos quedaron completamente claros con la situación, en el segundo caso el docente recalcó el hecho de que con la tesis dada se señalaba de forma implícita que el triángulo era isósceles, por lo cual no se podría dar como respuesta ésta misma, sino mas bien que lo que implicaba este hecho.				

5.7 Ingeniería de la situación de aprendizaje 6

Justificación de la sexta actividad

Según Van Hiele los alumnos que se encuentran en el tercer nivel son capaces de seguir demostraciones simples, cuando se les va explicando cada paso, ya que son idóneos de entender la conexión o implicación directa entre una situación y la que sigue. Es por ello que se ha propuesto esta actividad, para que los alumnos logren entender cuál es el proceso de una demostración, para ello, deberán deducir algunos datos que faltan en el “Esquema Demostrativo”, este se propone con el fin de ayudar a los alumnos a ordenar la información y hacer un seguimiento paso a paso de sus afirmaciones, para que en la próxima actividad el alumno logre realizar el mismo proceso sin necesidad de este esquema.

Principalmente, la actividad busca que el estudiante conozca la estructura lógica de un argumento, los esquemas de razonamiento válidos que se pueden usar, las distintas formas de estructurar y armar un discurso de una demostración directa y la utilización de un lenguaje idóneo, buscando finalmente traducir una demostración verbal a símbolos lógicos percibiendo la equivalencia de las estructuras.

Además basándonos en lo que dice Duval, para llegar a la demostración se debe hacer en base a argumentos válidos, vale decir mediante reglas o condiciones matemáticas constituidas, por ello, la actividad se basa sólo en la utilización de teoremas o axiomas debidamente establecidos para lograr llegar a la demostración de cada uno de los casos planteados.

Observación: Se hace notar que la idea de esquema demostrativo es de autoría de E. Moise (1972, p.90).

Objetivo de la actividad

Instaurar en los alumnos un esquema que permita deducir y ordenar proposiciones a favor de la formalidad de una demostración.

Metodología de la actividad

Se entregará la Ficha N°6, donde se propone un trabajo de manera individual, la actividad se enmarca dentro de un nivel de clasificación de los alumnos, ya que son capaces de reconocer

que unas propiedades se deducen de otras y de descubrir esas implicaciones, pero aun no logran desarrollar una demostración por sí solos, por eso se propone trabajar con estos cuadros de demostración donde ciertos pasos son validados por razones que se explicitan pero otros deben quedar a inferencia del alumno, para que este logre adquirir de una u otra manera un modelo de encadenamiento de los pasos de un razonamiento formal.

Es conveniente en cada situación ir cambiando las razones que se explicitan para lograr que los alumnos identifiquen la importancia de cada paso de razonamiento y la completa relación entre ellos. Además de aumentar el grado de dificultad de las demostraciones incluyendo en éstas dos o tres pasos de inferencia.

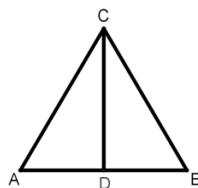
Al supervisar el desarrollo de la actividad el docente procurará:

- Incitar a los alumnos a seguir los pasos de la demostración y verificarlos por medio de la figura entregada, dando énfasis en las razones que justifican cada paso y asociando éstas al concepto de hipótesis y conclusión, donde por medio de una o más premisas se logra conjeturar ciertas propiedades que permitan lograr la demostración.
- Apoyar constantemente a los alumnos en cada caso requerido, en relación a confusiones que puedan surgir en cuanto al esquema demostrativo, y la total comprensión del encabezado del problema.

Ficha N° 6

En cada uno de los casos planteados completa el cuadro dando la razón por cual se hace válida cada uno de los pasos que llevan a una demostración

(1)

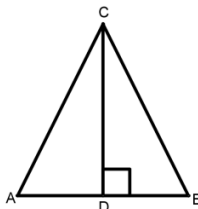


En el triángulo ABC se tiene que $AC \cong BC$ y $\angle ACD \cong \angle BCD$, demostrar que $\angle CAD \cong \angle CBD$

Esquema demostrativo

Afirmación	Razones
$AC \cong BC$	Dato (hipótesis)
$\angle ACD \cong \angle BCD$	
$CD \cong CD$	Todo segmento es congruente consigo mismo (identidad)
$\triangle ACD \cong \triangle CDB$	
$\angle CAD \cong \angle CBD$	

(2)

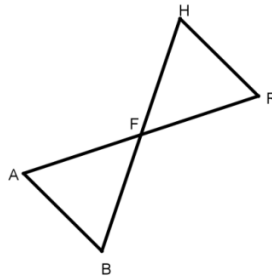


En el triángulo ABC se tiene que $CD \perp AB$ y $AD \cong BD$, demostrar que $\triangle ACD \cong \triangle CDB$

Esquema demostrativo

Afirmación	Razones
.....	Dato
$CD \perp AB$	
$\angle ADC \cong \angle BDC$	Definición de perpendicularidad y de ángulo recto
$CD \cong CD$	
$\triangle ACD \cong \triangle \dots$	

(3)

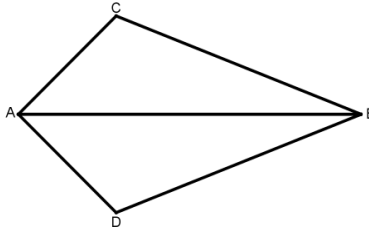


En la figura se tiene que F es el punto medio de AR y BH, demostrar que $AB \cong RH$

Esquema demostrativo

Afirmación	Razones
$AF \cong FR$	F es punto medio de AR
$BF \cong FH$	
$\angle AFB \cong \angle RFH$	Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes
.....	Postulado L.A.L
$AB \cong RH$	

(4)

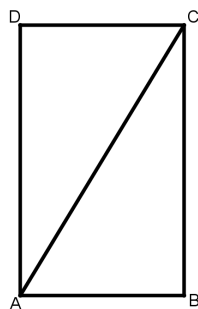


En el cuadrilátero se tiene que $AC \cong AD$ y además $\angle CAB \cong \angle DAB$, demostrar que $\angle ACB \cong \angle ADB$

Esquema demostrativo

Afirmación	Razones
.....	Dato
$\angle CAB \cong \angle DAB$	
.....	Todo segmento es congruente consigo mismo (identidad)
.....	Por criterio de congruencia L.A.L
$\angle ACB \cong \angle ADB$	

(5)



Dado el rectángulo $ABCD$ y la diagonal AC , demostrar que los triángulos ACD y ACB son congruentes.

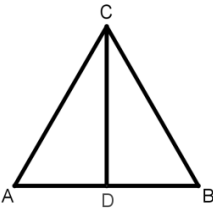
Esquema demostrativo

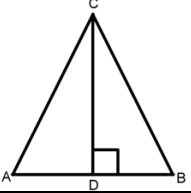
Afirmación	Razones
$AB \cong DC$	
$AC \cong AC$	
.....	Son lados opuestos de un rectángulo
.....	

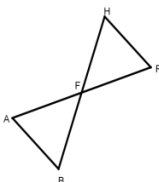
Análisis a priori de la actividad N°6

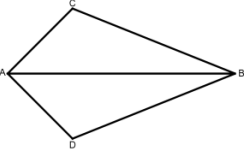
Observación: Se calificarán las posibles respuestas de los alumnos de la siguiente manera

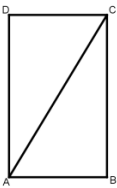
1. Correcta: se representará como respuesta esperada.
2. Incompleta: se representará como respuesta esperada (incompleta). Este tipo de respuesta presenta un desarrollo correcto, sin embargo, puede suceder que no se presenten verificaciones, justificaciones, datos utilizados en los argumentos, entre otros. En este caso el docente en la confrontación grupal debe incentivar al alumno a completar su desarrollo, con el fin de lograr una respuesta correcta.
3. Incorrecto: se calificará como respuesta esperada (incorrecta). En este caso el docente, junto con los alumnos deben, mediante una confrontación de estrategias, llegar a un consenso de modo de lograr una respuesta correcta en conjunto.

Situación 1	
En el triángulo ABC se tiene que $AC \cong BC$ y $\angle ACD \cong \angle BCD$, demostrar que $\angle CAD \cong \angle CBD$	
Respuesta esperada 1	
Esquema demostrativo	
Afirmación	Razones
$AC \cong BC$	Dato (hipótesis)
$\angle ACD \cong \angle BCD$	Dato
$CD \cong CD$	Todo segmento es congruente consigo mismo (identidad)
$\triangle ACD \cong \triangle CDB$	Por criterio de congruencia L.A.L
$\angle CAD \cong \angle CBD$	Ya que los triángulos ACD y CDB son congruentes, por lo tanto todos sus lados y ángulos son congruentes entre sí
Respuesta esperada 2 (Errónea)	
Esquema demostrativo	
Afirmación	Razones
$AC \cong BC$	Dato (hipótesis)
$\angle ACD \cong \angle BCD$	Dato
$CD \cong CD$	Todo segmento es congruente consigo mismo (identidad)
$\triangle ACD \cong \triangle CDB$	D punto medio de AB, por lo tanto por criterio L.L.L los triángulos son congruentes
$\angle CAD \cong \angle CBD$	Ya que los triángulos ACD y CDB son congruentes.
El alumno sabe que $\angle ACD \cong \angle BCD$, se pide justificar que $\triangle ACD \cong \triangle CDB$, para esto afirma sin justificación alguna que D es punto medio, concluyendo así que los triángulos son congruentes. Esta respuesta es errónea, ya que el argumento no es suficiente para justificar la afirmación dada. El docente debe motivar al alumno a justificar sus razones mediante sus conocimientos de congruencia de triángulos.	

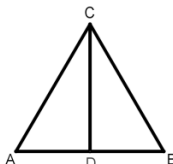
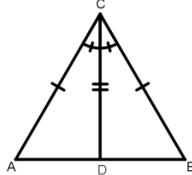
Situación 2	
En el triángulo ABC se tiene que $CD \perp AB$ y $AD \cong BD$, demostrar que $\triangle ACD \cong \triangle CDB$	
	
Respuesta esperada 1	
Esquema demostrativo	
Afirmación	Razones
$AD \cong BD$	Dato
$CD \perp AB$	Dato
$\angle ADC \cong \angle BDC$	Definición de perpendicularidad y de ángulo recto
$CD \cong CD$	<i>Todo segmento es congruente consigo mismo (Identidad)</i>
$\triangle ACD \cong \triangle CDB$	<i>Por criterio de congruencia L.A.L</i>
Respuesta esperada 2 (Incompleta)	
Esquema demostrativo	
Afirmación	Razones
$AD \cong BD$	Dato
$CD \perp AB$	<i>Se encuentra dado en el dibujo</i>
$\angle ADC \cong \angle BDC$	Definición de perpendicularidad y de ángulo recto
$CD \cong CD$	<i>Ya que son el mismo trazo</i>
$\triangle ACD \cong \triangle CDB$	<i>Si se dobla el triángulo en el trazo CD los triángulos calzan exactamente, vale decir, los triángulos son congruentes</i>
El alumno completa el cuadro demostrativo justificando sus argumentos por medio de la experimentación (doblaje y calce), es por este motivo que se tomará ésta respuesta como incompleta, considerando el nivel en el que se encuentra el taller. El profesor debe incentivar al alumno a justificar su respuesta mediante la hipótesis dada.	

Situación 3													
En la figura se tiene que F es el punto medio de AR y BH, demostrar que $AB \cong RH$.													
													
Respuesta esperada 1													
Esquema demostrativo <table> <tr> <th>Afirmación</th><th>Razones</th></tr> <tr> <td>$AF \cong FR$</td><td>F es punto medio de AR</td></tr> <tr> <td>$BF \cong FH$</td><td><i>F es punto medio de BH</i></td></tr> <tr> <td>$\sphericalangle AFB \cong \sphericalangle RFH$</td><td>Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes</td></tr> <tr> <td>$\triangle ABF \cong \triangle RHF$</td><td>Postulado L.A.L</td></tr> <tr> <td>$AB \cong RH$</td><td><i>Como los triángulos ABF y RHF son congruentes, se tiene que todos sus lados y ángulos homólogos también lo son.</i></td></tr> </table>		Afirmación	Razones	$AF \cong FR$	F es punto medio de AR	$BF \cong FH$	<i>F es punto medio de BH</i>	$\sphericalangle AFB \cong \sphericalangle RFH$	Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes	$\triangle ABF \cong \triangle RHF$	Postulado L.A.L	$AB \cong RH$	<i>Como los triángulos ABF y RHF son congruentes, se tiene que todos sus lados y ángulos homólogos también lo son.</i>
Afirmación	Razones												
$AF \cong FR$	F es punto medio de AR												
$BF \cong FH$	<i>F es punto medio de BH</i>												
$\sphericalangle AFB \cong \sphericalangle RFH$	Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes												
$\triangle ABF \cong \triangle RHF$	Postulado L.A.L												
$AB \cong RH$	<i>Como los triángulos ABF y RHF son congruentes, se tiene que todos sus lados y ángulos homólogos también lo son.</i>												
Respuesta esperada 2 (incompleta)													
Esquema demostrativo <table> <tr> <th>Afirmación</th><th>Razones</th></tr> <tr> <td>$AF \cong FR$</td><td>F es punto medio de AR</td></tr> <tr> <td>$BF \cong FH$</td><td><i>Dato</i></td></tr> <tr> <td>$\sphericalangle AFB \cong \sphericalangle RFH$</td><td>Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes</td></tr> <tr> <td>$\triangle ABF \cong \triangle RHF$</td><td>Postulado L.A.L</td></tr> <tr> <td>$AB \cong RH$</td><td><i>Ya que si se dobla la figura en base a un segmento tomando como referencia el punto F, los triángulos calzan exactamente, vale decir, los triángulos son congruentes.</i></td></tr> </table>		Afirmación	Razones	$AF \cong FR$	F es punto medio de AR	$BF \cong FH$	<i>Dato</i>	$\sphericalangle AFB \cong \sphericalangle RFH$	Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes	$\triangle ABF \cong \triangle RHF$	Postulado L.A.L	$AB \cong RH$	<i>Ya que si se dobla la figura en base a un segmento tomando como referencia el punto F, los triángulos calzan exactamente, vale decir, los triángulos son congruentes.</i>
Afirmación	Razones												
$AF \cong FR$	F es punto medio de AR												
$BF \cong FH$	<i>Dato</i>												
$\sphericalangle AFB \cong \sphericalangle RFH$	Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes												
$\triangle ABF \cong \triangle RHF$	Postulado L.A.L												
$AB \cong RH$	<i>Ya que si se dobla la figura en base a un segmento tomando como referencia el punto F, los triángulos calzan exactamente, vale decir, los triángulos son congruentes.</i>												
El alumno completa el cuadro demostrativo justificando sus argumentos por medio de la experimentación, es por este motivo que se tomará ésta respuesta como incompleta, considerando el nivel en el que se encuentra el taller. El profesor debe incentivar al alumno a justificar su respuesta mediante la hipótesis dada.													

Situación 4	
En el cuadrilátero se tiene que $AC \cong AD$ y además $\angle CAB \cong \angle DAB$, demostrar que $\angle ACB \cong \angle ADB$	
Respuesta Esperada 1	
Esquema demostrativo	
Afirmación	Razones
$AC \cong AD$	Dato
$\angle CAB \cong \angle DAB$	<i>Dato</i>
$AB \cong AB$	Todo segmento es congruente consigo mismo (identidad)
$\triangle ABC \cong \triangle ABD$	Por criterio de congruencia L.A.L
$\angle ACB \cong \angle ADB$	<i>Ya que los triángulos ABC y ABD son congruentes todos sus lados y ángulos son congruentes entre sí</i>
Respuesta Esperada 2 (incompleta)	
Esquema demostrativo	
Afirmación	Razones
$AC \cong AD$	Dato
$\angle CAB \cong \angle DAB$	<i>Se encuentra dado en el encabezado</i>
$AC \cong AD$	Todo segmento es congruente consigo mismo (identidad)
$\triangle ABC \cong \triangle ABD$	Por criterio de congruencia L.A.L
$\angle ACB \cong \angle ADB$	<i>Ya que ambos triángulos son congruentes</i>
En este caso ocurre que el alumno en el tercer paso del cuadro demostrativo, donde se señala que, “todo segmento es congruente consigo mismo (identidad)” no maneje bien el término de identidad, lo cual lo lleve a confundirse, y en la afirmación escriba que ese caso se da con los trazos AC y AD (ya que en la hipótesis se dice que éstos dos trazos son congruentes), y no logre identificar el trazo que corresponde a esa razón. El profesor deberá corregir este error, mediante la aclaración de la razón dada.	

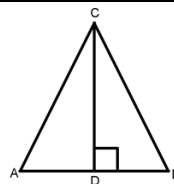
Situación 5	
Dado el rectángulo $ABCD$ y la diagonal AC , demostrar que los triángulos ACD y ACB son congruentes	
Respuesta Esperada 1	
Esquema demostrativo	
Afirmación	Razones
$AB \cong DC$	<i>Ya que en todo rectángulo los lados opuestos son congruentes</i>
$AC \cong AC$	<i>Todo segmento es congruente consigo mismo (Identidad)</i>
$AD \cong BC$	Son lados opuestos de un rectángulo
$\triangle ACD \cong \triangle ACB$	<i>Por criterio de congruencia L.L.L</i>
Respuesta Esperada 2 (incompleta)	
Esquema demostrativo	
Afirmación	Razones
$AB \cong DC$	<i>Por propiedad de rectángulos</i>
$AC \cong AC$	<i>Todo segmento es congruente consigo mismo (identidad)</i>
$AD \cong BC$	Son lados opuestos de un rectángulo
$\triangle ACD \cong \triangle ACB$	<i>Ya que al recortarlos y superponerlos los triángulos calzan exactamente</i>
Es posible que en este caso el alumno en el último paso del cuadro demostrativo, justifique su respuesta mediante la primera actividad que se llevo a cabo mediante la superposición de figuras y donde ésta figura se presentaba en aquella oportunidad. El profesor aclara que en este caso la justificación debe remitirse a argumentos que se infieren de los enunciados y no mediante la superposición.	

Análisis a posteriori y evaluación de la actividad N° 6

Situación 1																
 En el triángulo ABC se tiene que $AC \cong BC$ y $\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle BCD$, demostrar que $\sphericalangle CAD \cong \sphericalangle CBD$ Esquema demostrativo <table><tr><th>Afirmación</th><th>Razones</th></tr><tr><td>$AC \cong BC$</td><td>Dato (hipótesis)</td></tr><tr><td>$\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle BCD$</td><td>.....</td></tr><tr><td>$CD \cong CD$</td><td>Todo segmento es congruente consigo mismo (identidad)</td></tr><tr><td>$\triangle ACD \cong \triangle CDB$</td><td>.....</td></tr><tr><td>$\sphericalangle CAD \cong \sphericalangle CBD$</td><td>.....</td></tr></table>					Afirmación	Razones	$AC \cong BC$	Dato (hipótesis)	$\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle BCD$		$CD \cong CD$	Todo segmento es congruente consigo mismo (identidad)	$\triangle ACD \cong \triangle CDB$		$\sphericalangle CAD \cong \sphericalangle CBD$	
Afirmación	Razones															
$AC \cong BC$	Dato (hipótesis)															
$\sphericalangle ACD \cong \sphericalangle BCD$																
$CD \cong CD$	Todo segmento es congruente consigo mismo (identidad)															
$\triangle ACD \cong \triangle CDB$																
$\sphericalangle CAD \cong \sphericalangle CBD$																
Alumno 1 En una primera instancia el alumno completa el esquema de la siguiente manera: • “Dato” El paso completado es el esperado, pero los que siguen el alumno los deja simplemente en blanco.	Alumno 2 El alumno analiza la figura y luego completa el esquema de la siguiente manera: • “dato” • “LAL” • “porque los triángulos son congruentes”	Alumno 3 Alumno ausente	Alumno 4 El alumno proyecta el enunciado manipulando la figura dada de la siguiente manera:  Luego de analizar los datos completa el esquema de la	Alumno 5 El alumno luego de analizar la figura y los datos dados, completa el esquema de la siguiente manera: • “dato” • “Por criterio L.A.L” • “porque los triángulos son congruentes”												

			siguiente manera: • “<i>porque tienen común altura</i>” • <i>L.A.L</i> • “<i>porque si es congruente L.A.L los otros ángulos y lados también lo son.</i>”	
Evaluación El alumno sólo es capaz de completar el primer dato, tomando la respuesta como incompleta.	Evaluación Las respuestas dadas por el alumno son las esperadas, sólo faltó señalar en el último paso los triángulos a los cuales se refería que eran congruentes, o haber señalado la afirmación anterior.	Evaluación Alumno ausente	Evaluación La primera razón presentada por el alumno no es esperada ni correcta, sin embargo las dos siguientes se encuentran en los análisis preliminares pero faltó señalar en el último paso los triángulos a los cuales se refería que eran congruentes, o haber señalado la afirmación anterior.	Evaluación Las respuestas dadas por el alumno son las esperadas, sólo faltó señalar en el último paso los triángulos a los cuales se refería que eran congruentes, o haber señalado el paso anterior.
Gestión de la puesta en común Esta instancia fue bastante interesante, ya que los alumnos lograron identificar y determinar las razones que sustentan una afirmación dada trabajando correctamente en la situación, por otro lado aclararon sus dudas sobre el esquema entregado, haciendo preguntas tales como: ¿para qué sirve?, ¿debemos utilizarlo cada vez que demostremos? entre otras.				
Análisis a posteriori En general sólo tres de los cuatro alumnos logran completar el cuadro demostrativo de forma esperada aunque incompleta, es decir, si bien son capaces de determinar algunos de los datos aun no logran justificar completamente cada uno de ellos.				

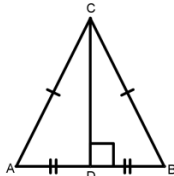
Situación 2



En el triángulo ABC se tiene que $CD \perp AB$ y $AD \cong BD$, demostrar que $\Delta ACD \cong \Delta CDB$

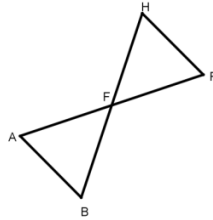
Esquema demostrativo

Afirmación	Razones
.....	Dato
$CD \perp AB$	
$\angle ADC \cong \angle BDC$	Definición de perpendicularidad y de ángulo recto
$CD \cong CD$	
$\Delta ACD \cong \Delta \dots\dots\dots$	

Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno en una primera instancia completa de la siguiente manera: - El alumno deja en blanco este punto “dato” “mismo segmento” “BCD” / “segmento congruente”	El alumno después de haber analizado los datos dados en la hipótesis del ejercicio completa de la siguiente manera: “$AD \cong BD$” “dato” “son el mismo trazo” $CDB / \angle CDA \cong \angle BDA$	Alumno ausente	El alumno primero que todo manipula la figura dada, proyectando el enunciado de manera escrita como sigue:  Luego de analizar el enunciado completa lo siguiente: “$AD \cong BD$” “dato”	En una primera instancia el alumno analiza los datos dados en la hipótesis del ejercicio y completa lo siguiente: “$AD \cong BD$” “dato” “todo segmento es congruente consigo mismo” “por criterio L.A.L”

			• “segmento común es congruente” • “$\triangle CDB$” / “L.L.L., tenemos que $AD \cong BD$ y $CD \perp AB$, por tanto los lados AC y BC también son congruentes”	
Evaluación El alumno completa el esquema de manera incompleta, ya que deja el primer paso en blanco, no escribe la razón esperada en el último paso para que los triángulos ACD y BCD sean congruentes, lo cual se debía justificar mediante la utilización de algún criterio de congruencia que fuera adecuado a la situación.	Evaluación El alumno completa hasta el penúltimo paso de manera esperada, ya que la última razón dada no es la indicada, pues debía señalar por cual criterio de congruencia los triángulos señalados eran congruentes.	Evaluación Alumno ausente	Evaluación El alumno da respuesta al problema correctamente mas esta no estaba considerada preliminarmente ya que demuestra la congruencia utilizando el criterio L.L.L.	Evaluación El alumno completa de manera esperada el esquema demostrativo.
Gestión de la puesta en común En esta instancia la mayoría de los alumnos señalan las respuestas de manera esperada utilizando un lenguaje pertinente permitiendo argumentos claros en la mayoría del esquema. Ahora bien, la generalidad del grupo muestra presentó dudas en la última razón a completar, el docente con ayuda de los alumnos aclara esta interrogante.				
Análisis a posteriori Los cuatro alumnos responden de forma esperada el esquema demostrativo, ya sea de forma incompleta como correcta. Sólo se destaca una de las razones planteada por uno de los alumnos, pues utiliza un criterio para demostrar la congruencia de triángulos diferente al esperado.				

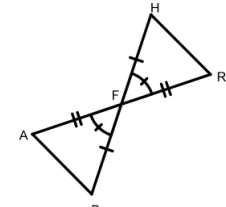
Situación 3



En la figura se tiene que F es el punto medio de AR y BH , demostrar que $AB \cong RH$

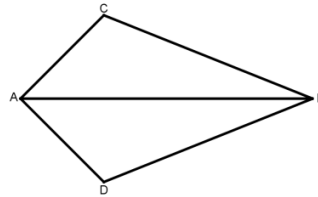
Esquema demostrativo

Afirmación	Razones
$AF \cong FR$	F es punto medio de AR
$BF \cong FH$	
$\angle AFB \cong \angle RFH$	Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes
.....	Postulado L.A.L
$AB \cong RH$	

Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno en una primera instancia analiza los datos entregados en la hipótesis, posterior a ello completa de la siguiente manera: “mismo segmento” - El alumno deja en blanco este punto “son congruentes”	El alumno de manera inmediata completa de la siguiente manera: “F es punto medio de BH” “$\triangle AFB \cong \triangle HFR$” “son congruentes”	Alumno Ausente	El alumno proyecta el enunciado dado en forma escrita en la figura dada, de la siguiente manera:  Posterior a ello completa, como sigue: “porque F es punto	En una primera instancia el alumno analiza los datos entregados en la hipótesis junto con la figura dada, luego completa lo siguiente: “F es punto medio de BH” “$\triangle AFB \cong \triangle HFR$” “sus lados también son congruentes”

			<i>medio”</i> • “$\Delta AFB \cong \Delta BFH$” • “<i>porque hay dos lados congruentes con otros dos lados, por tanto $AB \cong RH$”</i>	
Evaluación El alumno no responde de manera esperada ninguno de los puntos completados.	Evaluación Las respuestas dadas son las esperadas, a excepción de la última, en la cual se pedía dar la razón de porque los trazos AB y RH eran congruentes y eso se debía a raíz de la congruencia de los triángulos $\Delta AFB \cong \Delta HFR$ o también habría sido válido indicar que se daba por consecuencia del paso anterior.	Evaluación Alumno Ausente	Evaluación En primera instancia el alumno señala que el punto F es punto medio sin explicitar de que trazo, luego la última razón dada no se logra entender cuál es el postulado utilizado o la idea en particular, pues los puntos BFH no forman un triángulo.	Evaluación Las respuestas completadas por el alumno son las esperadas, pero la última razón dada no explicita la justificación por la cual los lados son congruentes.
Gestión de la puesta en común En esta instancia los alumnos preguntan dudas y en particular se enfocan en el entendimiento de la última razón a completar. Cabe señalar que pese a que en el trabajo individual la mayoría de los alumnos no entrega una razón correcta en la instancia de la confrontación si logran argumentar utilizando para ello un lenguaje pertinente justificando fehacientemente sus razones.				
Análisis a posteriori Tres de los cuatro alumnos logran responder de forma esperada, ya sea de forma correcta o incompleta. Se destaca que en este esquema hubo mayor dificultad para los alumnos ya sea para determinar los datos, como para justificar sus afirmaciones.				

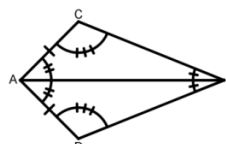
Situación 4



En el cuadrilátero se tiene que $AC \cong AD$ y además $\angle CAB \cong \angle DAB$, demostrar que $\angle ACB \cong \angle ADB$

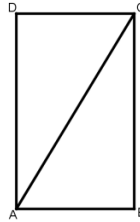
Esquema demostrativo

Afirmación	Razones
.....	Dato
$\angle CAB \cong \angle DAB$	
.....	Todo segmento es congruente consigo mismo (identidad)
.....	Por criterio de congruencia L.A.L
$\angle ACB \cong \angle ADB$	

Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno en una primera instancia analiza la hipótesis dada , luego completa de la siguiente manera: • “$AC \cong AD$” • “dato” • “$AC \cong AD$” • El alumno deja en blanco este punto • “son congruente consigo mismo”	El alumno primero que todo consulta dudas al docente de acuerdo a la hipótesis dada y completa de la siguiente manera: • “$AC \cong AD$” • “Dato” • “$AB \cong AB$” • “$\triangle ABC \cong \triangle ABD$” • El alumno deja sin contestar este punto.	Alumno Ausente	El alumno proyecta el enunciado de forma escrita en la figura dada, de la siguiente manera:  Posterior a ello completa señalando lo que sigue: • “$AC \cong AD$” • “dato” • “$AB \cong AB$” • “$\triangle CAB \cong \triangle BAD$”	El alumno en un primer momento analiza los datos entregados en el encabezado, luego completa señalando que: • “$AC \cong AD$” • “dato” • “$AB \cong AB$” • “$\triangle ABC \cong \triangle ABD$” • “porque los triángulos son congruentes sus ángulos también lo son”

			• “teniendo el segmento AB, tengo ya dos ángulos congruentes, AC y AD es congruente, los ángulos son congruentes, por tanto, $\triangle ACB$ y $\triangle ADB$ son congruentes”	
Evaluación El primer y segundo paso completado es el esperado preliminarmente, sin embargo sus inferencias posteriores no presentan una concordancia con lo pedido.	Evaluación Las respuestas dadas hasta el penúltimo paso son las esperadas.	Evaluación Alumno Ausente	Evaluación Las respuestas completadas son las esperadas, pero cabe señalar que el alumno no explica de manera pertinente sus argumentos al justificar la última afirmación, se logra entender que utiliza el criterio de congruencia L.A.L para demostrar la congruencia entre los triángulos ACB y ADB sin embargo no presenta la razón pedida.	Evaluación Las respuestas dadas por el alumno son las esperadas sólo hay que añadir que en el último paso faltó explicitar la congruencia entre los triángulos ABC y ADB para justificar la congruencia de los ángulos ACB y ADB
Gestión de la puesta en común En esta instancia los alumnos señalan utilizando un lenguaje pertinente y claro los argumentos esperados hasta el penúltimo paso, puesto que al justificar que los ángulos ACD y ADB son congruentes no logran inferir que se debía por congruencia de triángulos ($\triangle ABC$ y $\triangle ABD$) ahora bien el docente incentiva a los alumnos a describir posibles respuestas junto con la razón que la valida, con el fin de desarrollar en conjunto la correcta.				
Análisis a posteriori En general las respuestas de todos los alumnos han sido de forma esperadas, sin embargo aun incompletas.				

Situación 5



Dado el rectángulo $ABCD$ y la diagonal AC , demostrar que los triángulos ACD y ACB son congruentes

Esquema demostrativo

Afirmación	Razones
$AB \cong DC$	
$AC \cong AC$	
.....	Son lados opuestos de un rectángulo
... ..	

Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno analiza el ejercicio, luego completa de la siguiente manera: • “dato” • “mismo segmento” • El alumno deja en blanco este punto • El alumno deja en blanco este punto / El alumno deja en blanco este punto	El alumno analiza los datos entregados y completa de la siguiente manera: • “dato y son lados opuestos” • “mismo segmento” • “$AD \cong CB$” • “$\triangle ACD \cong \triangle ACB$” /El alumno deja sin contestar este punto	Alumno Ausente	El alumno analiza los datos completando de la siguiente forma: • “porque es rectángulo” • “segmento es congruente consigo mismo” • El alumno deja en blanco este punto • El alumno deja en blanco este punto / El alumno deja en blanco este punto	El alumno analiza la hipótesis y tesis junto con la figura dada, luego completa de la siguiente forma: • “son lados opuestos de un rectángulo” • “todo segmento es congruente consigo mismo” • “$AD \cong BC$” • “$\triangle ACD \cong \triangle ACB$” / “por criterio L.L.L”

Evaluación El alumno no logra plantear las razones que permiten justificar la congruencia entre los triángulos.	Evaluación Las respuestas dadas son las esperadas a excepción del último punto, donde el alumno deja en blanco la razón del porque, $\Delta ACD \cong \Delta ACB$ lo cual se debía justificar mediante la utilización de algún criterio de congruencia ya sea L.L.L o L.A.L.	Evaluación Alumno Ausente	Evaluación El alumno no logra plantear las razones que permiten justificar la congruencia entre los triángulos, argumentando solo las dos primeras razones del esquema.	Evaluación Las respuestas completadas por el alumno son las esperadas por el docente, por lo cual se concluye que el alumno logró entender la idea central del esquema demostrativo.
Gestión de la puesta en común La actividad propuesta a juicio de los alumnos fue la que presento mayor grado de dificultad, debido a la cantidad de datos a completar (alternados entre afirmaciones y razones). Para lograr el correcto desarrollo de la demostración es que cada alumno presenta los datos determinados por cada uno de ellos y apoyados en la figura (marcando sobre ella lados congruentes) se logra llegar al objetivo. El hecho que solo logren manifestar sus argumentos oralmente refleja la dificultad que tienen para escribir los argumentos y justificar sus afirmaciones, por lo cual en esta actividad el alumno logra asociar de manera aun más clara hacia donde se dirige el taller y el beneficio que este esquema les puede aportar a las próximas actividades.				
Análisis a posteriori Se destaca que sólo uno de los cuatro alumnos logra completar el esquema de forma esperada y correcta, los otros alumnos no logran justificar completamente de forma clara sus afirmaciones.				

5.8 Ingeniería de la situación de aprendizaje 7

Justificación de la séptima actividad

En la actualización curricular se propone gradualmente conceptualizar los procesos de visualización y exploración para que en niveles superiores los alumnos logren demostrar relaciones o propiedades geométricas, además según Van Hiele, el alumno en el cuarto nivel logra hacer demostraciones formales encadenando diversas implicaciones simples para llegar desde la hipótesis hasta la tesis, por ello la actividad presentada se encuentra diseñada con el objetivo de que el alumno logre la demostración de algunos enunciados simples.

Por otro lado, según Duval la validez de un razonamiento deductivo se encuentra regida mediante la utilización de encadenamientos de enunciados que se plantean como validos de acuerdo al tipo de argumentación que presente. Mediante la experimentación y la generalización inductiva los alumnos extienden su conocimiento sobre las formas, las relaciones geométricas y su vocabulario de formas legítimas de razonamiento.

Observación: Algunas de las demostraciones planteadas aparecen en los textos escolares autorizados por el Ministerio de Educación.

Objetivo de la actividad

Demostrar enunciados en dos o tres pasos de deducción mediante la utilización de reglas matemáticas establecidas.

Metodología de la actividad

Cada alumno recibe la Ficha N°7, la cual debe trabajar de manera individual. El docente sólo dará las indicaciones de la actividad y supervisará el trabajo de los alumnos.

El profesor debe incentivar que los alumnos logren:

- Identificar la hipótesis y tesis de cada problema.
- Utilizar la menor cantidad posible de pasos de resolución.

- Justificar cada una de las afirmaciones hechas.

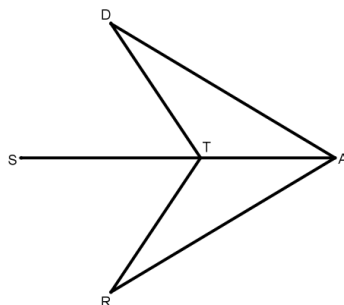
Se puede proponer que los alumnos utilicen el esquema demostrativo de la actividad anterior, en el caso que esto les ayude a llegar a la resolución del problema.

Al finalizar la actividad el docente debe elegir a alumnos que hayan utilizado ideas interesantes para el problema o que hayan podido realizar la demostración. De tal manera, que los diversos métodos de resolución puedan confrontarse de modo de lograr el objetivo de la actividad.

Demostrar cada uno de los ejercicios planteados

Situación 1

Si el trazo SA es bisectriz de los ángulos DAR y DTR respectivamente, demostrar que $\triangle DAT \cong \triangle RAT$.

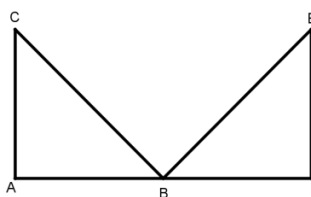


Respuesta

Situación 2

De la figura presentada a continuación, se tienen los siguientes datos:

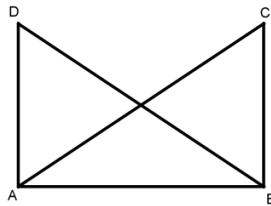
- AC perpendicular a AB
- DE perpendicular a BD
- $AC \cong DE$
- B punto medio de AD
- Demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle DBE$



Respuesta

Situación 3

En la figura se tiene que el trazo DA es perpendicular al trazo AB ; el trazo CB es también perpendicular al trazo AB , además $\angle CAB \cong \angle DBA$. Demostrar que $\triangle ABD \cong \triangle ABC$

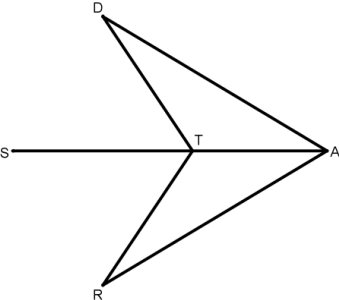


Respuesta

Análisis a priori de la actividad N°7

Observación: Se calificarán las posibles respuestas de los alumnos de la siguiente manera

1. Correcta: se representará como respuesta esperada.
2. Incompleta: se representará como respuesta esperada (incompleta). Este tipo de respuesta presenta un desarrollo correcto, sin embargo, puede suceder que no se presenten verificaciones, justificaciones, datos utilizados en los argumentos, entre otros. En este caso el docente en la confrontación grupal debe incentivar al alumno a completar su desarrollo, con el fin de lograr una respuesta correcta.
3. Incorrecto: se calificará como respuesta esperada (incorrecta). En este caso el docente, junto con los alumnos deben, mediante una confrontación de estrategias, llegar a un consenso de modo de lograr una respuesta correcta en conjunto.

Situación 1
Si el trazo SA es bisectriz de los ángulos DAR y DTR respectivamente, demostrar que $\triangle DAT \cong \triangle RAT$. 
Respuesta Esperada 1 El alumno identifica en la figura cada uno de los datos dados en el enunciado. A continuación plantea que: $\angle DTS \cong \angle STR$, ya que el trazo SA es bisectriz del ángulo DTR. $\angle DAT \cong \angle TAR$, ya que el trazo SA es bisectriz del ángulo DAR. Luego se tiene que $\angle DTA$ es igual a $180^\circ - \angle DTS$ $\angle ATR$ es igual a $180^\circ - \angle STR$ Por lo cual $\angle DTA \cong \angle ATR$ Y considerando que $TA \cong TA$ (ya que todo segmento es congruente consigo mismo) por criterio de congruencia A.L.A los triángulos $\triangle DAT$ y $\triangle RAT$ son congruentes
Respuesta Esperada 1(incompleta) El alumno identifica en la figura cada uno de los datos dados en el enunciado, pero plantea usando una justificación incorrecta que: $\angle DTA \cong \angle RTA$, ya que el trazo SA es bisectriz del ángulo DTR. $\angle DAT \cong \angle TAR$, ya que el trazo SA es bisectriz del ángulo DAR

A continuación plantea que $TA \cong TA$, ya que todo segmento es congruente consigo mismo.
Luego por criterio de congruencia A.L.A los triángulos $\triangle DAT$ y $\triangle RAT$ son congruentes.

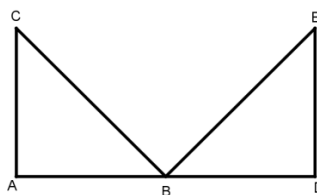
Respuesta Esperada 2 (incompleta)

El alumno logra identificar la hipótesis del problema, pero no encuentra alguna proposición que se pueda inferir de ésta, por lo cual trata de demostrar la congruencia de los triángulos mediante la superposición, determinando que los triángulos son congruentes pues poseen igual superficie.

Situación 2

De la figura presentada a continuación, se tienen los siguientes datos:

- AC perpendicular a AB
- DE perpendicular a BD
- $AC \cong DE$
- B punto medio de AD
- Demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle DBE$



Respuesta Esperada 1

El alumno identifica en la figura cada uno de los datos dados en el enunciado del problema, pudiendo inferir la siguiente información:

$\angle CAB = 90^\circ$, pues AC perpendicular a AB

$\angle EDB = 90^\circ$, pues DE perpendicular a BD

$\overline{AB} = \overline{BD}$, pues B punto medio de AD

Una vez identificada la hipótesis y los datos necesarios para completar la demostración, el alumno plantea:

$AC \cong DE$, dato entregado en el enunciado.

$AB \cong BD$, ya que B es punto medio del trazo AD .

$\angle CAB \cong \angle BDE$, pues ambos miden lo mismo.

Por lo tanto, por criterio de congruencia L.A.L los triángulos son congruentes.

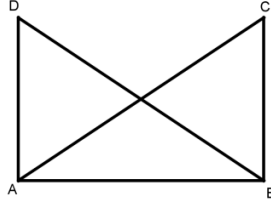
Respuesta Esperada 2 (incompleta)

El alumno se basa únicamente en la figura y la visualización para demostrar lo que se está pidiendo, doblando la figura en el punto B y asegurando que por el hecho de calzar, estas poseen igual área, finalmente los triángulos son congruentes.

El profesor deberá corregir este hecho, motivando al alumno hacer uso de la hipótesis dada, además de propiedades y definiciones matemáticas, en especial de sus conocimientos sobre criterios de congruencia de triángulos.

Situación 3

En la figura se tiene que el trazo DA es perpendicular al trazo AB ; el trazo CB es también perpendicular al trazo AB , además $\angle CAB \cong \angle DBA$. Demostrar que $\triangle ABD \cong \triangle ABC$



Respuesta Esperada 1

El alumno identifica en la figura los datos que se entregan en el enunciado, pudiendo inferir la siguiente información:

$\angle DAB = 90^\circ$, pues DA perpendicular a AB

$\angle CBA = 90^\circ$, pues CB perpendicular a AB

Por lo tanto se tiene que:

$\angle DAB \cong \angle CBA$, pues ambos miden lo mismo.

$\angle CAB \cong \angle DBA$, por hipótesis.

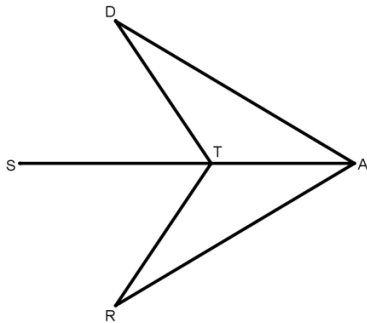
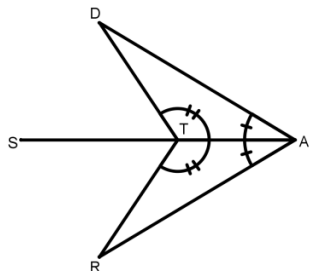
$AB \cong AB$, ya que todo segmento es congruente consigo mismo.

Luego por criterio de congruencia A.L.A, los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ABC$ son congruentes.

Respuesta Esperada 2 (incompleta)

El alumno solamente es capaz de marcar sobre la figura los datos entregados en el enunciado, pero no logra inferir alguna información. Por otro lado no logra ver los dos triángulos por separados y sólo se fija en el triángulo que se forma en el centro con dos ángulos congruentes y un lado común, lo cual no lo llevará a demostrar lo que se pide, ya que no tendrá ningún criterio que valide la congruencia entre ambos triángulos.

Análisis a posteriori y evaluación de cada figura de la actividad N° 7

Situación 1				
Si el trazo SA es bisectriz de los ángulos DAR y DTR respectivamente, demostrar que $\triangle DAT \cong \triangle RAT$.				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno sólo señala que: “El trazo SA (bisectriz) corta los ángulos”.	El alumno comienza identificando la hipótesis y la tesis del ejercicio. Luego indica lo siguiente: “El trazo es bisectriz de los ángulos DAR y DTR entonces serían congruentes ya que tienen igual base”.	El alumno comienza marcando sobre la figura los datos que se pueden inferir a partir de la hipótesis dada por el problema, de la siguiente manera:  Luego señala lo siguiente: “La bisectriz divide los ángulos y hace que el	El alumno establece lo siguiente “si se tienen dos ángulos y a estos se les traza la bisectriz nacen dos ángulos congruentes. La bisectriz queda como un lado en común para ambos triángulos, cumpliendo con el criterio de congruencia $A.L.A$ ”.	El alumno identifica la hipótesis del ejercicio y afirma que “el lado TA es común para ambos triángulos, como el ángulo en A también lo es. La bisectriz pasa también por T , que sería otro ángulo común. Por criterio $A.L.A$ los triángulos son congruentes”.

		$\sphericalangle DAT \cong \sphericalangle TAR$ (porque los divide justo en la mitad)” • “Comparten el lado TA” • “El $\sphericalangle DAR$ también se divide en el medio, quedando dos ángulos iguales, uno en cada lado” “Por lo tanto, los triángulos son congruentes por criterio de congruencia A.L.A”.		
Evaluación El alumno no emite respuesta al problema sólo se remite a enunciar una propiedad que no es correcta.	Evaluación El alumno emite un argumento el cual es interpretativo para el lector, ya que se podría dilucidar que la base que el alumno nombra hace referencia al lado en común a los triángulos por lo cual justificaría la congruencia entre ellos por el principio de congruencia A.L.A, sin embargo la justificación no toma un grado de validez ni formalidad por lo cual no se considera como la demostración que se esperaba.	Evaluación El alumno argumenta por el principio de congruencia A.L.A, sin embargo se salta un paso al justifica la congruencia entre los ángulos $DTA \cong \sphericalangle RTA$, se hace notar, pese a lo anterior, el orden del alumno y la secuencialidad en sus afirmaciones apoyado en un lenguaje apropiado en la demostración la cual es esperable en este nivel del taller. La respuesta del alumno es esperada	Evaluación El alumno realiza un análisis del problema donde argumenta sobre la bisección de dos ángulos, asumiendo que se refiere a los ángulos DAR y DTR y proponiendo la bisectriz como lado en común en ambos triángulos, se subentiende que el alumno ocupa el principio de congruencia A.L.A para justificar la congruencia entre los triángulos. Ahora bien los argumentos aunque no están incorrectos no son los esperados para esta actividad por no ser lo suficientemente claros y válidos.	Evaluación El alumno argumenta por el principio de congruencia A.L.A como se esperaba con lo cual justifica la congruencia entre los triángulos, sin embargo no describe la mayoría de las justificaciones que permiten demostrar por dicho principio

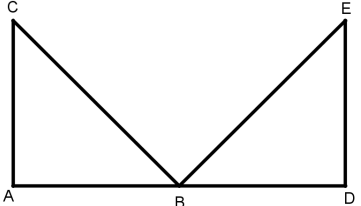
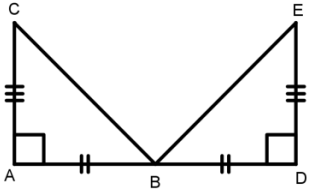
Gestión de la puesta en común

Al comenzar el análisis de esta situación el alumno tres se ofrece voluntariamente a exponer su trabajo al grupo, los argumentos del alumno se sustentan en propiedades que se infieren directamente de los datos que se entregan y aplicación de los principios de congruencia, el lenguaje utilizado por el alumno es acorde con la validez de cada argumento que presenta (semejante a su trabajo individual), la fuerza de su justificación no da lugar a debate en el grupo, sin embargo el docente propone y pregunta por la validez de la justificación que se presenta en la congruencia entre los ángulos DTA y $\angle RTA$ poniendo en conflicto los argumentos del alumno.

En general los alumnos argumentan pertinentemente sus afirmaciones, usando un lenguaje técnico y una concordancia entre los enunciados y la vía de construcción de la justificación lo que se concreta en el proceso de la demostración.

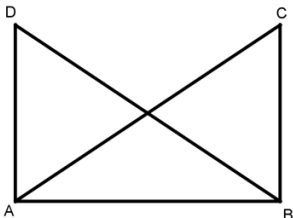
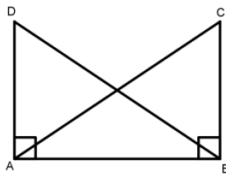
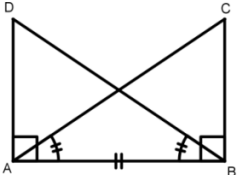
Análisis a posteriori

Sólo dos de los alumnos logran realizar la actividad de forma esperada sin embargo ambas son respuesta incompletas.. Otro alumno no es capaz siquiera de enunciar alguna afirmación y los otros alumnos, si bien logran avanzar en el desarrollo, no logran justificar de modo claro o pertinente la congruencia pedida.

Situación 2				
De la figura presentada a continuación, se tienen los siguientes datos: AC perpendicular a AB DE perpendicular a BD $AC \cong DE$ B punto medio de AD Demostrar que $\triangle ABC \cong \triangle DBE$				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno indica lo siguiente: $AC = AB$ $DE = BD$ $AC = DE$ (Deben medir lo mismo) “El punto medio de AD es donde se encuentran CB con EB” “Por criterio L.L.L los	El alumno para comenzar indica la hipótesis y tesis: $AC \perp AB$ $DE \perp BD$ $AC \cong DE$ Demostrar que: $\triangle ABC \cong \triangle DBE$ Luego indica lo siguiente: “Si son perpendiculares entonces los dos tendrían un ángulo recto (90°)”	El alumno comienza marcando sobre la figura cada uno de los datos dados en el problema, obteniendo lo siguiente: 	El alumno comienza abarcando el problema del siguiente modo: “Si se tiene que $AC \perp AB$, entonces se tiene que el ángulo CAB es recto”. “Si se tiene que $DE \perp BD$, entonces se tiene que el ángulo EDB es recto”. Por lo tanto ya se tiene un par de ángulos congruentes. Luego utiliza la hipótesis	El alumno comienza identificando la hipótesis del problema: $AC \cong DE$ y el punto medio de AD es B. Luego afirma que “si AC es perpendicular a AB y DE perpendicular a BD, entonces se forman ángulos rectos, además $AB \cong BD$ pues B punto medio. Entonces $\triangle ABC \cong \triangle DBE$, porque

<i>triángulos son congruentes”.</i>	• “El lado <i>CA</i> y <i>DE</i> son opuestos y también congruentes” • “Si <i>AD</i> tiene un punto medio que es <i>B</i> entonces las bases de los triángulos son congruentes” • “Cumplirían con el criterio de L.A.L”.	Luego indica que: • “Comparten un $\sphericalangle 90^\circ$ (porque es un triángulo rectángulo)” • “Comparten el mismo punto medio (<i>B</i>), por lo cual $AB \cong BD$, porque aquel punto indica igualdad a ambos lados” • “El lado <i>CA</i> y <i>ED</i> son congruentes, pues es un dato” “En resumen cuenta con L.A.L, por lo cual los triángulos son congruentes”.	afirmando que $AC \cong DE$, por ultimo <i>B</i> al ser punto medio divide al trazo <i>AD</i> en dos trazos congruentes ($AB \cong BD$) Por lo tanto por criterio de congruencia L.A.L los triángulos son congruentes.	<i>poseen un ángulos y dos lados iguales (criterio L.A.L)”</i>
Evaluación El alumno interpreta incorrectamente la perpendicularidad de los trazos, lo cual conlleva a justificar la congruencia de los triángulos por el principio L.L.L esta situación no era esperado preliminarmente.	Evaluación La respuesta del alumno es cercana a lo que se esperaba más se presentan algunos detalles del enlace de las afirmaciones y lenguaje de la argumentación, se logra entender lo que el alumno intenta hacer pero no queda claro algunos conceptos al hacer referencia a “<i>Si son perpendiculares entonces los dos tendrían un ángulo recto</i>” o cuando expresa “<i>Si AD tiene un punto medio que es B entonces las bases de los triángulos son congruentes</i>” por lo cual en	Evaluación El alumno apoyado en el registro visual del problema argumenta como se esperaba justificando la congruencia entre los triángulos por el principio de congruencia L.A.L, se denota en el alumno una correcta interpretación figurar amparado en la representación algebraica de los datos que observa, aunque al argumentar los trazos perpendiculares no explicita cuáles de ellos son, la justificación se comprende y es válida de acuerdo a los datos que se proponen.	Evaluación El alumno argumenta por el principio de congruencia L.A.L como se esperaba, utilizando esto para justificar la congruencia entre los triángulos.	Evaluación El alumno realiza un análisis del problema donde argumenta sobre el punto medio y la propiedad de perpendicularidad entre trazos justificando por el criterio de congruencia L.A.L la congruencia entre los triángulos como se esperaba, ahora bien el grado de validez de sus afirmaciones es correcto pero el orden y la concatenación de éstas no propone el entendimiento ideal de la demostración más al existir un lenguaje acorde y una argumentación clara la

	la justificación no se aprecia un grado de validez ni formalidad en las afirmaciones considerando a la justificación como una prueba.			justificación toma ribetes de demostración.
Gestión de la puesta en común Los alumnos en general argumentaron sus respuestas correctamente, en gran medida utilizando un lenguaje pertinente, amparándose en las propiedades que se deducen de los datos que se entregan y los principios de congruencias como procedimiento de justificación. Cabe señalar que los alumnos dos y cinco que en su trabajo individual omitieron algunas afirmaciones importantes y supusieron otras, en esta instancia argumentan correctamente amparados en la figura que se presenta y los principios de congruencia de triángulos, explicitando los ángulos y lados congruentes y concadenando sus afirmaciones utilizando un lenguaje apropiado con lo cual construyen una argumentación que es aceptada por el grupo. Se debe hacer notar que el alumno uno presenta su trabajo antes que todos, más el grupo no asimila sus conclusiones (semejantes al trabajo individual) refutando cada paso que el alumno presenta, luego de unos minutos de exposición no logra argumentar una lectura coherente para su trabajo no pudiendo justificar la congruencia entre los triángulos.				
Análisis a posteriori Sólo uno de los alumnos logra responder de forma esperada y correcta. Otro alumno no es capaz de emitir afirmaciones ni argumentos válidos al problema, en cuanto a los otros tres alumnos se toman sus respuestas como esperadas incompletas, pues si bien logran entender y dar una noción de las justificaciones de sus afirmaciones, no las logran realizar de forma clara u ordenada.				

Situación 3				
En la figura se tiene que el trazo DA es perpendicular al trazo AB; el trazo CB es también perpendicular al trazo AB, además $\angle CAB \cong \angle DBA$. Demostrar que $\triangle ABD \cong \triangle ABC$				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno no responde el ejercicio.	En primer lugar el alumno identifica la hipótesis y la tesis del ejercicio, indicando que: $DA \perp AB$ $CB \perp AB$ $\angle CAB \cong \angle DBA$ Demostrar que $\triangle ABD \cong \triangle ABC$. Luego indica lo siguiente: • “$\angle CAB \cong \angle DBA$” • “También comparten la base, así que tendrían un lado congruente” • “DA y BC son lados opuestos entonces serían congruentes” • “Cumplirían con el criterio de L.A.L”	El alumno afirma, basándose en la hipótesis que la medida de los ángulos $\angle DAB$ y $\angle CBA$ es 90°, obteniendo la siguiente figura:  Luego indica lo siguiente: • “Comparten el trazo $\overline{AB}$” • “Tienen ambos ángulos de 90°” • “Tienen un lado opuesto, que tiene el mismo tamaño $\overline{DA} \cong \overline{CB}$” • “Los dos triángulos tienen un ángulo de 45°” • “En resumen, cuentan con	El alumno comienza marcando sobre la figura cada uno de los datos dados en el problema, obteniendo lo siguiente:  Luego afirma que “los dos triángulos están compartiendo el trazo AB, por tanto ya tienen un lado común. DA y CB al ser perpendiculares a este mismo trazo forman para cada triángulo un ángulo recto, teniendo ángulos congruentes y sabemos que $\angle CAB \cong \angle DBA$, entonces por criterio de congruencia A.L.A los	El alumno comienza identificando la hipótesis del ejercicio: $DA \perp AB$ $CB \perp AB$ $\angle CAB \cong \angle DBA$ Luego afirma lo siguiente: “Ambos triángulos al tener trazos perpendiculares forman ángulos rectos en A y en B, ósea $\angle DAB \cong \angle CBA$ y los triángulos ABD y ABC tienen un ángulo congruente y el trazo AB es común para ambos, ósea el triángulo ABD es congruente al triángulo ABC porque poseen dos ángulos congruentes entre sí, ósea cumplen con el criterio de congruencia A.L.A”

		<i>A.L.A y L.A.L” “Por lo cual son congruentes”</i>	<i>triángulos son congruentes.”</i>	
Evaluación El alumno no responde el ejercicio.	Evaluación La justificación del alumno presenta diversas dificultades de redacción y secuencialidad de sus argumentos, sin embargo la que lleva a un error es asumir que los lados <i>DA</i> y <i>BC</i> al ser opuestos serán congruentes, además de no explicitar el modo que emplea el criterio L.A.L dado los datos que tiene. La validez de su justificación no tiene un grado de certeza ni presenta la formalidad que se esperaba.	Evaluación La argumentación del alumno comienza correctamente al entender los datos que se entregan sin embargo al asumir visualmente que los lados <i>AD</i> y <i>BC</i> son congruentes lo lleva a justificaciones incorrectas (la afirmación “ <i>Los dos triángulos tienen un ángulo de 45°</i> ” pese a ser incorrecta no implicaría en su error al asumir que los ángulos son congruentes), esta situación no era esperada preliminarmente.	Evaluación El alumno apoyado en la figura argumenta por el principio de congruencia A.L.A como se esperaba, con lo cual justifica la congruencia entre los triángulos, se denota en el alumno un orden y una secuencia en afirmaciones apoyado en un lenguaje apropiado en la demostración	Evaluación La respuesta del alumno es la que se espera, sin embargo el orden de expresar y entregar sus resultados no es idóneo, aún cuando logra deducir todos los datos que podría justificar la congruencia entre los triángulos la justificación que produce no presenta algunos datos que permitirían lograr la demostración esperada.
Gestión de la puesta en común Esta situación presentó una variada gama de argumentaciones, en primera instancia el alumno dos expone sus argumentos al grupo, los cuales en un primer momento son aceptados, sin embargo al asumir la congruencia entre los lados <i>DA</i> y <i>BC</i> sólo por ser lados opuestos; los demás alumnos refutan esta situación afirmando “<i>no se pueden saber si son iguales visualmente</i>” el alumno intenta seguir con su justificación mas no logra argumentar de otro modo. Posteriormente el alumno cuatro continua con el trabajo del estudiante anterior, destacándose el uso de un lenguaje pertinente a la situación, sin embargo la secuencialidad de sus afirmaciones no genera el entendimiento del problema (en el trabajo individual sus argumentos y afirmaciones fueron correctas). Finalmente éste alumno logra justificar la congruencia entre los triángulos, aunque el grupo no comprende claramente sus argumentos. El docente a favor de presentar la solución al problema plantea una serie de preguntas con las cuales los alumnos logran armar una justificación que permite demostrar el enunciado.				
Análisis a posteriori En la actividad dos alumnos logran completar la respuesta de forma esperada correcta (aunque uno de ellos, expresa argumentos de forma desordenada, remediando éste hecho en la etapa de confrontación de los resultados). Otro alumno no es capaz de responder a este problema, ni emitir afirmación alguna. Los otros dos alumnos responden de manera incompleta, pues utilizan ciertos criterios que los hacen establecer afirmaciones incorrectas.				

5.9 Ingeniería de la situación de aprendizaje 8

Justificación de la octava actividad

Según Van Hiele el cuarto nivel se caracteriza por la comprensión y el empleo del razonamiento formal, además de la utilización de reglas lógicas, de propiedades ya establecidas para obtener nuevas propiedades, vale decir el alumno puede realizar demostraciones formales conectando diversas implicaciones simples para llegar desde la hipótesis hasta la tesis, siguiendo los lineamientos de las actividades anteriores los alumnos se encuentran capacitados para desarrollar las actividades presentadas, demostraciones donde no se presentan los datos directamente sino que el estudiante deberá deducir respecto a las propiedades que pueda utilizar en cada caso o realizar algún cambio figural en pos de la demostración, según Perry y otros en este producto los alumnos logran una justificación de carácter deductivo encadenando y explicitando afirmaciones y sus respectivas razones dentro de algún campo axiomático, siendo la última acción de la actividad demostrativa.

La actividad conlleva realizar un proceso visual, exploratorio y deductivo utilizando reglas lógicas para llegar a justificar la demostración que se le pide, la actividad es la culminación de un proceso donde el alumno utiliza todo tipo de procesos llámense estos intuición, visualización, exploración y verificación para conseguir el producto.

Objetivo de la actividad

Demostrar enunciados por medio de premisas que se infieren de los datos y/o figura.

Metodología de la actividad

Se entrega a cada alumno la Ficha N°8 para trabajar en ella de manera individual, la actividad consta de tres demostraciones que deben resolver los alumnos, las cuales vienen dadas con un grado de dificultad mayor a la actividad anterior, por tanto los alumnos pueden resolverlas en la cantidad de pasos que ellos estimen convenientes, pues son variados los datos que deben inferir de modo de lograr el objetivo.

Al supervisar el desarrollo de la actividad el docente procurará:

- Lograr que los alumnos comprendan los enunciados de los ejercicios.
- En el caso que no puedan realizar una demostración completa, apoyar al alumno para que sea capaz de identificar la hipótesis y tesis del problema.
- Incentivar a los alumnos a justificar cada uno de sus pasos de razonamiento.

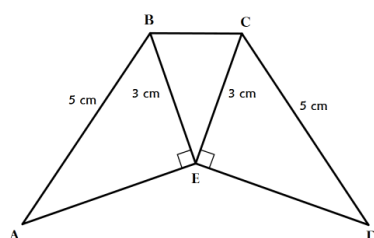
Al finalizar la actividad el docente elegirá alumnos que hayan desarrollado los ejercicios de diversas formas, para luego exponer cada una de sus ideas. En el caso que exista que ningún alumno haya realizado un desarrollo completo de la demostración, el profesor puede realizar una ronda de preguntas referentes al problema, de modo de motivar a los alumnos a plasmar sus argumentos con pertinencia y validez.

Ficha N° 8

Desarrollar cada uno de los ejercicios planteados a continuación:

Situación 1

Observa la siguiente figura:



Claudia afirma que el triángulo AEB y el triángulo EDC son congruentes.

¿Es cierto lo que afirma Claudia?

SI ____

NO ____

Escribe tus argumentos y señala a continuación, los datos que consideras necesarios para fundamentar tu respuesta.

(Ministerio de Educación Simce, 2009, p. 54)

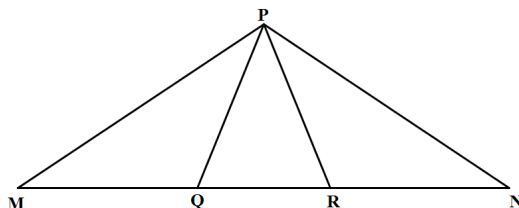
Respuesta:

Situación 2

En la figura presentada a continuación se tienen los siguientes datos:

$$\overline{MQ} = \overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{NR}.$$

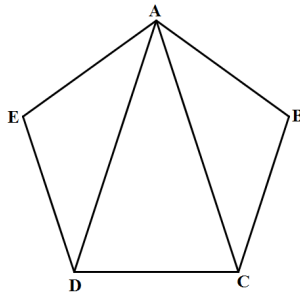
Demostrar que el triángulo MNP es isósceles.



Respuesta:

Situación 3

Sea $ABCDE$ un pentágono regular. Demostrar que el triángulo ADC es isósceles.

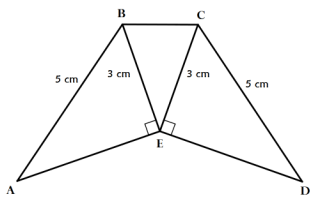


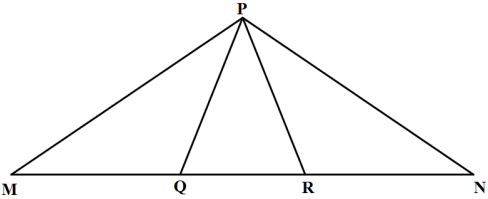
Respuesta:

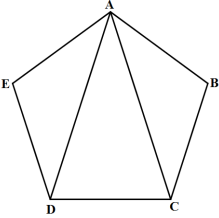
Análisis a priori de la actividad N°8

Observación: Se calificarán las posibles respuestas de los alumnos de la siguiente manera

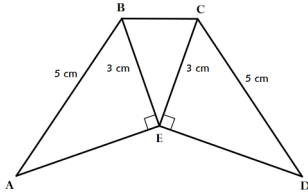
1. Correcta: se representará como respuesta esperada.
2. Incompleta: se representará como respuesta esperada (incompleta). Este tipo de respuesta presenta un desarrollo correcto, sin embargo, puede suceder que no se presenten verificaciones, justificaciones, datos utilizados en los argumentos, entre otros. En este caso el docente en la confrontación grupal debe incentivar al alumno a completar su desarrollo, con el fin de lograr una respuesta correcta.
3. Incorrecto: se calificará como respuesta esperada (incorrecta). En este caso el docente, junto con los alumnos deben, mediante una confrontación de estrategias, llegar a un consenso de modo de lograr una respuesta correcta en conjunto.

Situación1	
Observa la siguiente figura: Claudia afirma que el triángulo AEB y el triángulo EDC son congruentes. ¿Es cierto lo que afirma Claudia? SI ☐ NO ☐ Escribe tus argumentos y señala a continuación, los datos que consideras necesarios para fundamentar tu respuesta.	
Respuesta Esperada1 Los triángulos AEB y EDC son rectángulos, por lo tanto se puede hacer uso del teorema de Pitágoras, obteniendo que el trazo AE mide 4 cm y el trazo ED mide 4 cm, además $AB \cong CD$ y $BE \cong CE$ por lo tanto por criterio de congruencia L.L.L o también L.A.L ($BE \cong CE$ y $\angle AEB \cong \angle CED$), los triángulos AEB y EDC son congruentes.	
Respuesta Esperada 2 (incorrecta) Cómo los triángulos AEB y EDC tienen dos lados congruentes asume que el lado AE y ED también son congruentes, luego los triángulos son congruentes por criterio de congruencia L.L.L	
Respuesta Esperada 3 (incorrecta) El alumno no considera el hecho de que los triángulos AEB y EDC son triángulos rectángulos, luego justifica del siguiente modo: Ya que no se puede obtener el lado que falta, no se puede utilizar ningún criterio de congruencia para poder demostrar la congruencia entre ambos triángulos.	
Respuesta Esperada 4 (incompleta) El alumno se centra sólo en el triángulo del centro, por lo que no considera los datos que le entregan los triángulos AEB y EDC, luego justifica su respuesta diciendo: Ya que sólo se sabe que el triángulo del centro es isósceles, falta información para poder demostrar que los triángulos AEB y EDC son congruentes.	

Situación 2	
En la figura presentada se tienen los siguientes datos: $\overline{MQ} = \overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{NR}.$ Demostrar que el triángulo MNP es isósceles.	
Respuesta Esperada 1 El alumno marca los datos que se dan en la hipótesis en la figura dada. Luego analiza la figura de tal manera que determina una estrategia adecuada para llegar a la demostración. Cómo MPQ y PRN son triángulos isósceles se sabe que la medida de los ángulos basales es igual, luego los ángulos PQM y PRN son congruentes, por lo tanto por criterio de congruencia L.A.L los triángulos MPQ y PRN son congruentes. Luego, el triángulo MNP es isósceles, ya que $MP \cong PN$	
Respuesta Esperada 2 (incompleta) El alumno anota la información que se presenta en la hipótesis, luego como se sabe que MQP y PRN son triángulos isósceles con lados congruentes, y los ángulos basales congruentes da por hecho que los ángulos $\angle PMQ \cong \angle PNR$, luego el triángulo MNP es isósceles.	
Respuesta Esperada 3 (incorrecta) Se sabe que QP es congruente a PR, obteniendo así QPR un triángulo isósceles, entonces si el triángulo “menor” (QPR) es isósceles, el triángulo “mayor” (MNP) también lo será.	

Situación 3	
Sea $ABCDE$ un pentágono regular. Demostrar que el triángulo ADC es isósceles.	
Respuesta Esperada 1 El alumno anotar la información que se le presenta en la hipótesis del problema en el dibujo dado. Luego por propiedades de pentágono regular se sabe que todos sus lados son congruentes al igual que sus ángulos. Entonces los triángulos DEA y ABC son congruentes por criterio de congruencia L.A.L pues $AE \cong ED \cong AB \cong BC$ y $\angle AED \cong \angle ABC$. Por lo tanto $AD \cong AC$, luego el triángulo DAC es isósceles.	
Respuesta Esperada 2 El alumno sólo recuerda que un pentágono regular posee todos sus lados de igual medida, a partir de esto asume que los trazos AD y AC también serán congruentes. Por lo tanto, el triángulo ADC es isósceles.	

Análisis a posteriori y evaluación de la actividad N° 8

Situación 1				
Observa la siguiente figura: Claudia afirma que el triángulo AEB y el triángulo EDC son congruentes. ¿Es cierto lo que afirma Claudia? SI ____ NO ____ Escribe tus argumentos y señala a continuación, los datos que consideras necesarios para fundamentar tu respuesta.				
				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno indica que lo afirmado por Claudia es cierto, para justificar esto señala: • “AB mide 5 cm y DC mide 5 cm” • “$BE \cong CE$ pues ambos lados miden 3 cm” • “Sus ángulos interiores iguales” • “Por lo tanto: L.A.L y A.L.L”	El alumno indica que lo afirmado por Claudia es cierto pues: “Son congruentes ya que ambos llevan un ángulo recto (90°) además de que su base mide 3 cm, además los lados BA y CD son congruentes ya que miden lo mismo (5 cm) y también el lado AE y ED son congruentes ya que ambos miden 4 cm. Entonces cumpliría con el criterio de L.A.L” Cabe señalar que el alumno para determinar la medida de los lados faltantes utilizó el Teorema de Pitágoras, realizando cada uno de los cálculos respectivos.	El alumno que es cierto lo que afirma Claudia. Luego completa la información faltante en ambos triángulos (medida de lados) mediante la utilización del Teorema de Pitágoras, señalando lo siguiente: • “Tienen un ángulo igual ($\angle 90^\circ$)” • “Un lado de 3cm igual” • “En medio tienen un triángulo isósceles que tiene dos ángulos iguales compartidos con ambos triángulos, por lo cual, tienen otro ángulo en común” • “$BE \cong EC$” • “$\angle AEB \cong \angle CED$” • “$\angle ABE \cong \angle ECD$”	El alumno señala que es cierto lo que afirma Claudia. Luego argumenta su respuesta mediante lo siguiente: • “Ambos triángulos AEB y EDC poseen ángulos rectos” • “E es el punto medio del trazo AD, lo que quiere decir que esta dividido en dos partes iguales” “BE y CE poseen la misma medida, y $AB \cong CD$, o sea $\triangle AEB \cong \triangle EDC$, porque posee sus tres lados iguales, cumple con el criterio L.L.L, y también ambos triángulos poseen $\angle 90^\circ$, también podría cumplir con el criterio LAL”	El alumno señala que es cierto lo que afirma Claudia. Luego señala lo siguiente: “Hay dos lados que son congruentes con otros dos lados, por lo tanto para comprobar que son congruentes estos triángulos falta un lado o un ángulo, al tener estos dos lados congruentes unidos a un punto al mismo nivel da que el ángulo EBA es congruente con DCE (por criterio LAL) y si también sabemos que ambos triángulos tienen ángulo recto y los dos lados congruentes el lado que falta para los dos también son congruentes”

		• “Cumple con criterio A.L.A, por lo cual los triángulos son congruentes” • “También: $AB \cong CD$, entonces cumple con L.A.L” • “$\sphericalangle ABE \cong \sphericalangle ECD$” • “$BE \cong EC$”		
Evaluación El alumno asume apoyado en la figura la congruencia de los ángulos interiores entre los triángulos, lo cual conlleva a justificar la congruencia de los triángulos por el principio L.L.L lo cual no era esperado preliminarmente.	Evaluación La respuesta del alumno es la esperada. Cabe señalar que el alumno para determinar la medida de los lados faltantes utilizó el Teorema de Pitágoras, realizando cada uno de los cálculos respectivos.	Evaluación La argumentación del alumno comienza correctamente al entender los datos que se entregan, sin embargo al asumir visualmente que los ángulos ABE y ECD son congruentes lo lleva a justificar erradamente la congruencia entre los triángulos por medio del criterio A.L.A lo cual no era esperado preliminarmente. Adicionalmente y empleando nuevamente la congruencia entre estos triángulos aplica el principio L.A.L para probar la congruencia entre los triángulos, esta justificación no es correcta al provenir de datos no validos ni concretos y no era esperada preliminarmente.	Evaluación El alumno sustenta su justificación en un argumento que no es válido “ E es el punto medio del trazo AD , lo que quiere decir que esta dividido en dos partes iguales” efectivamente los lados son congruentes mas la justificación se vuelve errada al asumir AD como trazo y visualmente inferir que E es el punto medio de este supuesto trazo sin ningún argumento formal que lo valide. Esta respuesta del alumno no estaba contemplada preliminarmente.	Evaluación El alumno realiza un análisis del problema donde argumenta sobre los datos que hacen falta para aplicar algún criterio de congruencia, a posterior interpreta la congruencia entre ángulos basados en un argumento confuso (se refiere a niveles) lo cual conduce a una justificación donde el grado de validez de sus afirmaciones no es correcto. Se denota además un orden y concatenación de las afirmaciones que no propone el entendimiento ideal de la justificación.

Gestión de la puesta en común

Durante esta instancia los alumnos plantean sus ideas, comenzando un debate donde cada uno defiende sus afirmaciones, en este instante el docente pide al alumno dos que exponga el trabajo realizado, en primera instancia por medio del teorema de Pitágoras calcula la medida de los trazos AE y ED , luego señala al grupo curso las justificaciones de su trabajo individual, tomando un papel protagónico, ya que enfrenta preguntas de sus compañeros dando las respectivas respuestas apoyado en el docente, hecho fundamental ya que los alumnos espectadores logran entender de manera clara y sencilla el ejercicio propuesto. Se hace notar que el lenguaje utilizado por el alumno es bastante pertinencia y la concordancia entre sus afirmaciones es la adecuada para justificar su demostración.

Análisis a posteriori

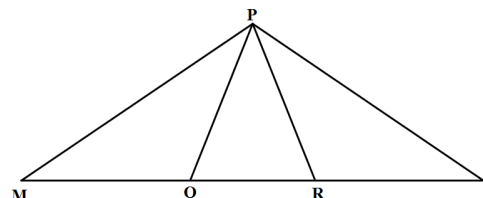
En la actividad sólo uno de los alumnos logra responder de forma esperada y correcta. Tres alumnos restantes cometen el error de afirmar ciertas cosas mediante la visualización, los cuales en algunos casos resulta ser correcto y en otros no. Se hace notar que el último de los alumnos, si bien logra justificar sus afirmaciones, aun realiza estos de una forma “poco ordenada” lo cual dificulta en ciertos momentos el completo entendimiento del desarrollo.

Situación 2

En la figura presentada se tienen los siguientes datos:

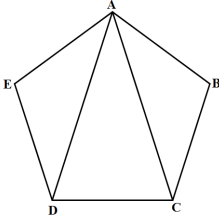
$$\overline{MQ} = \overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{NR}.$$

Demostrar que el triángulo MNP es isósceles.



Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno para este caso señala lo siguiente: <i>“Es isósceles, porque si juntamos MPQ con PRN encontramos un triángulo de donde:</i> $MQ \cong RN$ $QP \cong PR$ $MP \cong PN$ <i>Por razón A.L.A”</i>	El alumno indica lo siguiente: <i>“El triángulo PRN y el triángulo MQP son congruentes ya que todos sus lados son iguales ($MQ = PQ = PR = NR$), entonces si los triángulos interiores de un triángulo son congruentes entonces MNP será un triángulo isósceles”</i>	El alumno indica sobre la figura los datos dados en la hipótesis, luego indica que: $MP \cong PN$ $MQ \cong RN$ $\triangle MQP \cong \triangle PRN$ es isósceles” <i>“Es isósceles porque tiene dos lados iguales y la base un poco más grande (MN), es un triángulo isósceles, dividido en tres triángulos isósceles”</i>	El alumno indica lo siguiente: <i>“Como dato se tiene que $MQ \cong PQ \cong PR \cong NR$, o sea si $MQ \cong PQ$ y $PR \cong NR$ quiere decir que $MP \cong NP$, o sea $\triangle PQM \cong \triangle PRN$, ya que tiene sus lados iguales entre sí, y son isósceles. Por lo tanto MNP, también es isósceles, como dije $MP \cong PN$, está conformado por dos triángulos isósceles”</i>	El alumno indica lo siguiente: <i>“El lado MN está dividido en tres, dos partes iguales y uno distinto en medio de los dos. QR es el lado distinto a los otros dos, y une Q con P y R con P dividiendo ese ángulo en tres, y formando dos lados iguales que unan M con P y N con P”</i>

Evaluación El alumno presenta algunos argumentos que provienen de análisis visuales (juntar los triángulos) pero los datos que entrega no presentan justificación alguna para demostrar la congruencia entre los triángulos MQP y NRP, lo que justificaría la condición de isósceles de los triángulos MNP.	Evaluación El alumno al argumentar la congruencia entre los triángulos PRN y MQP sólo toma como justificación los datos que son dados por el problema y supone que los lados MP y NP son congruentes sin explicación ni inferencia alguna, finalmente argumenta que “<i>si los triángulos interiores de un triángulo son congruentes entonces MNP será un triángulo isósceles</i>” lo cual carece de sentido en esta situación, además no sustenta su afirmación de modo alguno. Cabe señalar que el lenguaje y la secuencia de las afirmaciones no son idóneos para justificar formalmente.	Evaluación El alumno comienza argumentando la congruencia entre los lados MP y PN lo cual no es justificado de modo alguno, invalidando los argumentos posteriores al ser sustentados sobre una inferencia errónea.	Evaluación El alumno asume que los triángulos PQR y PRN al tener dos lados congruentes tendrá el tercer lado homólogo congruente, sin embargo la justificación de su afirmación es nula lo que invalida los argumentos posteriores por estar sustentados sobre la base de una inferencia errónea.	Evaluación El alumno comienza por describir la división del trazo MN sin embargo sus argumentos son banales basados sólo en un registro visual, a posterior plantea una serie de afirmaciones donde destaca aquella que hace relación a que el ángulo MPN se divide en tres partes iguales mas no propone justificación de este hecho, finalmente el alumno plantea que los lados MN y PN son congruentes sin ningún grado de validez de sus justificaciones. El trabajo del alumno no es esperado preliminarmente.
Gestión de la puesta en común Esta instancia es fundamental, ya que ninguno de los alumnos logra demostrar lo pedido y la mayoría utiliza argumentos que no son concordantes con propiedades matemáticas establecidas, vale decir señalan hechos convenientes a su criterio para lograr lo pedido, es por ello que el docente comienza primeramente a señalar los datos que se pueden obtener de la hipótesis, posterior a ello realiza preguntas a los alumnos de modo de motivarlos a participar en el desarrollo del ejercicio, logrando en conjunto la demostración de lo pedido.				
Análisis a posteriori En la actividad ninguno de los alumnos logra responder de forma esperada correcta, ni incompleta. Se hace notar, que si bien trataron de realizar un cierto desarrollo éste no es idóneo para poder desarrollar de forma correcta la demostración planteada.				

Situación 3				
Sea $ABCDE$ un pentágono regular. Demostrar que el triángulo ADC es isósceles. 				
Alumno 1	Alumno 2	Alumno 3	Alumno 4	Alumno 5
El alumno indica lo siguiente: • “Es isósceles, porque tiene todos sus ángulos iguales” • “Pero sus lados no miden lo mismo”	El alumno no realiza ningún procedimiento en esta situación.	El alumno indica que todos los lados que componen el pentágono regular son congruentes, luego señala que: • “$AD \cong AC$” • “$\overline{DC} = \overline{CB} = \overline{BA} = \overline{AE} = \overline{ED}$” “El triángulo tiene dos lados iguales (AD y AC) y un lado distinto (DC) por lo cual el triángulo DCA es isósceles”	El alumno indica lo siguiente: “Es un pentágono regular, A es como un punto medio entre E y B ; y E como punto medio entre A y D . Como B , punto medio entre A y C , por lo tanto $AD \cong AC$ ”	El alumno en una primera instancia señala que, “ $AED = ABC$ y $DC = DC$ ”, luego argumenta diciendo que, “Al trazar una recta desde A hasta D será mucho mayor que DC y desde A hasta C también es mucho mayor que DC , $AD = AC$. Cada lado es igual con los otros lados, pero si hacemos que se unan dos puntos en un punto común dará dos rectas congruentes y lado distinto”
Evaluación El alumno sólo se remite a mencionar dos afirmaciones que no proporcionan argumento alguno para lograr la demostración.	Evaluación El alumno no hace ninguna referencia al problema.	Evaluación El alumno plantea una justificación que no cumple con la formalidad y el rigor que se espera, Además logra recordar una cualidad del pentágono regular (lados congruentes), la interpreta correctamente pero no la utiliza para	Evaluación El alumno esboza algunos argumentos que si bien se pueden interpretar para que sean correctos no tienen la fuerza y la validez que la demostración necesita.	Evaluación El alumno presenta variados argumentos sin justificación que carecen de entendimiento y validez.

		justificar lo pedido, más bien sólo se remite a mencionar lo que debe demostrar asumiendo que aquello se cumple.		
Gestión de la puesta en común Esta instancia es fundamental, ya que nuevamente los alumnos no logran demostrar lo pedido y la mayoría utiliza argumentos que carecen de concordancia y validez, además el lenguaje utilizado es de tono coloquial careciendo de notación técnica y geométrica, por ello el docente cambia la estrategia prevista acomodándola a la situación que se presenta, por lo cual es él quien toma el protagonismo de esta instancia, desarrollando mediante la ayuda de los alumnos la demostración pedida.				
Análisis a posteriori Al igual que en la situación anterior, ninguno de los alumnos logra responder de forma esperada correcta, de hecho sólo tres de los alumnos logran ordenar algunos datos, sin poder utilizar estos para demostrar lo pedido.				

Capítulo 6. Conclusiones y sugerencias

Conclusiones

Para comenzar esta conclusión, es necesario señalar que la enfocaremos de acuerdo al cumplimiento de los objetivos propuestos en el presente trabajo, lo que nos parece relevante a fin de comprender de mejor manera los resultados del mismo. Posteriormente, se dará a conocer de manera general los resultados obtenidos en la propuesta de los cinco alumnos de segundo año medio con sus respectivos alcances y conclusiones.

En relación a los objetivos específicos del presente trabajo, dentro de la descripción de los textos escolares utilizados, podemos añadir que no se presentan actividades que fomenten la adquisición de la habilidad demostrativa en los alumnos, ya que más bien existen patrones a seguir de algunas demostraciones con el propósito de que posteriormente el alumno, demuestre un determinado hecho siguiendo el modelo conocido, lo cual implica que no se da mayor importancia en la utilidad de ésta y/o el beneficio de adquirir esta habilidad.

Ahora bien, de acuerdo a lo que se presenta en los documentos oficiales del Ministerio de Educación consideramos que se deja entrever una discordancia con los textos escolares autorizados.

A través de la presente investigación se ha trazado una forma de trabajo, que a pesar de ser desarrollada en un tiempo precario se ha percibido un pequeño cambio en el desarrollo de la actividad demostrativa en los alumnos, puesto que se logró que la mayoría de ellos realizara algunas demostraciones simples, hecho completamente destacable puesto que estamos consientes que no es inmediata la adquisición de la habilidad demostrativa, ya que se debe ir desarrollando de manera paulatina debido a la dificultad que trae consigo, incluso no sólo en el ámbito de la matemática, sino más bien que en todas las ciencias, en consecuencia se rescata que los alumnos respondieron positivamente a la propuesta, situación que detallaremos a continuación a fin de graficar y concluir oportunamente.

En principio cabe señalar que las actividades se realizaron de acuerdo a los cánones establecidos, tales como, asistencia y disponibilidad de los alumnos a participar activamente

en cada una de las actividades, realizando aportes personales que fueron completamente valorables al contribuir significativamente a los procesos de enseñanza.

La representación y análisis del trabajo de los cinco alumnos nos permiten afirmar que existen diferencias sustanciales entre algunos de ellos en relación a la adquisición de los aprendizajes, a continuación se dará a conocer la evolución de cada uno de ellos:

- El alumno uno, a pesar de no cumplir de manera general nuestro objetivo, pues en todas las actividades desarrolladas sus argumentos empleados fueron respaldados por registros visuales, se destaca el hecho que existió una evolución en relación al manejo del lenguaje utilizado (logrando hacer uso de notaciones matemáticas), y a la utilización de conceptos matemáticos.
- El alumno dos aunque logra asimilar algunos conceptos, mantiene dificultades en la secuencialidad e inferencia de afirmaciones en relación a las argumentaciones utilizadas en la justificación de las actividades, aunque adquiere los procesos preparatorios de la actividad demostrativa llámense éstos, visualización, experimentación, exploración y formulación de conjeturas.
- El alumno tres logra adquirir un lenguaje formal en la mayoría de los argumentos dados para la justificación de demostraciones, en general se puede decir que logra adquirir la habilidad demostrativa, si bien en algunas actividades sus argumentaciones lograron encontrarse incompletas se vio que en la confrontación de manera verbal logró manifestar sus ideas mediante hechos válidos, secuenciales y formales.
- El alumno cuatro, si bien en la mayoría de las actividades al momento de argumentar sus respuestas éstas fueron basadas en el registro visual, existió finalmente la adquisición de la habilidad demostrativa, aflorando principalmente durante las confrontaciones, ya que era en ese instante donde sus argumentos emergían de manera clara y coherente, logrando incluso en la actividad cuatro ser el único que logra realizar la deducción indicada adelantándose a los aprendizajes esperados en las actividades finales.
- El alumno cinco durante la aplicación de la propuesta fue un caso importante a estudiar, pues cada actividad desarrolla por él, tenía un orden poco claro o aun más,

confundía considerablemente la hipótesis con la tesis, sin embargo, se destaca el uso del cuadro demostrativo, el cual logró ayudar considerablemente al alumno en el desarrollo de las demostraciones.

En concordancia a lo anterior creemos que la propuesta elaborada y desarrollada en el presente trabajo es un aporte para potenciar la habilidad deductiva en los alumnos en el ámbito de la congruencia de triángulos, que siendo desplegada, incluso junto a otros tipos de técnicas, puede llegar a consolidar dicha habilidad más allá de este saber, dada la importancia que tiene la habilidad deductiva en cualquier ciencia o estudio.

Se está consciente que aún queda mucho por hacer en el ámbito del desarrollo de la habilidad deductiva, no sólo en relación con la congruencia de triángulos, sino más bien en todos las áreas de la matemática, pero este es un primer paso, ya que seguiremos estudiando sobre el tema por ser a nuestro criterio uno de los más difíciles de adquirir y desarrollar en los alumnos durante su enseñanza escolar.

Sugerencias y recomendaciones

Luego del proceso de investigación, al reflexionar sobre lo sucedido a lo largo de la implementación de la propuesta se pueden mencionar algunas recomendaciones que pretenden ser de utilidad para aquellos que deseen replicar nuestro trabajo:

- La actividad uno y tres constan de varias situaciones, por lo cual se recomienda en el caso de no poseer el tiempo suficiente (el cual puede exceder a una hora cronológica) seleccionar los ejercicios para plantear a los alumnos.
- En cuanto a la actividad dos y tres, se sugiere que los vértices de cada triángulo sean rotulados con anterioridad por el docente, para que así en la confrontación la notación utilizada sea común para todos.
- En la actividad cuatro, primera situación, se entrega un enunciado que hace referencia a un triángulo isósceles. En este caso, faltó señalar la base de dicho polígono. Si bien,

los alumnos asumieron el trazo que correspondía a éste de forma correcta, se sugiere que en un próximo planteamiento del problema, se deje de forma explícita este dato.

- Realizar una explicación más detallada, en la actividad cinco, referente a las reglas lógicas utilizadas, con el fin de que los alumnos comprendan el objetivo de la actividad y la secuencia que sigue la propuesta.
- En la actividad seis, se puede realizar una demostración al inicio de la clase y hacer la conexión entre ésta y el esquema demostrativo que se presenta, buscando una mejor comprensión de la realización de la actividad.
- En consideración con la actividad siete y ocho, las cuales tienen tres situaciones cada una, se recomienda plantear una o dos situaciones por clase, pues a pesar de ser demostraciones con pocos pasos de deducción, resultan complejas y agotadoras para los alumnos.

Bibliografía

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. Bogotá: Editorial Iberoamérica.

Bell, E. (1949). *Historia de las Matemáticas*. México: Fondo de cultura económica.

Campillay, W. (2010). *La Demostración en los programas de secundaria de matemática en Chile*. [Versión electrónica]. Revista Iberoamericana de educación matemática, N° 22, 77-89.

Codina, A., y Lupiañez, J. (1999). *El razonamiento matemático: Argumentación y Demostración*. Actas del XXXII Congreso de la sociedad matemática Mexicana. Guadalajara, México.

Crespo, C., y Farfán R. (2005). *Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo*. Relime Vol. 8, Núm. 3, 287-317.

Duval, R. (1992). *Argumenter, Démontrer, Expliquer: Continuite ou rupture cognitive?* Petit x, N° 31, 37-61.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. Bogotá: Editorial Iberoamérica.

Hernández, R., Baptista, P., y Fernández, C. (2003). *Metodología de la Investigación*. México: Editorial McGraw-Hill.

Mejía, J. (2004). *Sobre la investigación cualitativa. Nuevos conceptos y campos de desarrollo*. *Investigaciones sociales*. N° 13, 277-299. Lima.

- Moise, E. (1968). *Elementos de Geometría superior*. México: Compañía editorial continental.
- Moise, E. (1972). *Serie Matemática Moderna IV. Geometría*. Bogotá. Editorial Norma Colombia y fondo educativo Interamericano.
- Muñoz, M., y Cid, E. (2008). *Matemática 1° Medio*. Chile: Editorial Arrayan.
- Perry, P., Camargo, L., Samper, C., y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. Bogotá: Editorial Nomos.
- Reyes, M., y Valenzuela M. (2009). *Matemática*. Chile: Editorial McGraw-Hill.
- Santiago. Ministerio de Educación. (2004). *Chile y el aprendizaje de matemáticas y ciencias según TIMMS*. Chile.
- Santiago. Ministerio de Educación. (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media en su Actualización Curricular 2009*. Chile.
- Santiago. Ministerio de Educación. (2009). *Resultados para docentes y directivos SIMCE segundo educación media*. Chile.
- Santiago. Ministerio de Educación. (2010). *Mapas de Progresos del Aprendizaje Geometría*. Chile.
- Vidal, R., Chicharro, M., y Montoya, S. (2007). *Matemática Primero Medio*: Editorial Zig-Zag

